Аналіз базису Уолша як перехідної системи до систем функцій із рекурсивним впорядкуванням

Л.Б. Петришин
AGH Науково-технічний університет,
Краків, Польща
Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника
Івано-Франківськ, Україна
L.B.Petryshyn@gmail.com

Analysis of the Walsh basis as the transitional system to recursive ordering functions systems

L.B. Petryshyn
AGH University of Science and Technology,
Cracov, Poland
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
Ivano-Frankivsk, Ukraine
e-mail: L.B.Petryshyn@gmail.com

***Анотація*—Здійснено аналіз базису Уолша як системи дискретно-гармонічних функцій Радемахера і Грея, а також дискретно-негармонічних мультиплікативних функцій Уолша. Встановлено фазову взаємозалежність складових функцій системи у парах. Визначено базис функцій Уолша із рекурсивним впорядкуванням**

***Abstract*—The analysis of the Walsh basis as discrete harmonic Rademacher and Gray functions and multiplicative discrete nonharmonic Walsh functions system is done. The phase interdependent of function system components in pairs is presented. Defined Walsh functions basis with recursive ordering**

Ключові слова—теоретико-числові перетворення; функції Уолша; Радемахера; Грея; кодування

Keywords— number theoretical transformation; Walsh functions; Rademacher; Gray; coding

I. Вступ

Техніко-економічна ефективність комп’ютеризованих інформаційних систем в істотній мірі залежить від застосованого методу кодування повідомлень і відповідних методів перетворення форми інформації та цифрової обробки сигналів як носіїв образів інформаційних процесів оточення. Дослідження ефективності систем кодування та перетворення форми інформації є актуальним завданням, вирішення якого дозволяє обґрунтувати вибір базису та здійснити швидкі теоретико-числові перетворення повідомлень в обчислювальній системі. Метою роботи було продовження досліджень методів кодування та теоретико-числових перетворень повідомлень [1] при переході від дискретно-гармонічних систем типу унітарних, дискретно-фазових, двійкових, Грея тощо до дискретно-негармонічних систем типу Уолша та рекурсивних Галуа. Дослідження ґрунтувались на застосуванні апарату теоретико-числових перетворень дискретної математики. Практична значимість полягає у можливості застосування встановлених аналітичних залежностей для побудови швидких алгоритмів перетворення форми та цифрової обробки інформації. Сучасні цифрові системи функціонують із застосуванням основних бінарних позиційних систем числень як то унітарні та двійкові, а також непозиційної типу Грея, синтез яких проаналізовано в роботі [2]. Такі методи володіють рядом функціональних обмежень як то формування міжкодових «шпильок» в двійкових системах, чи то необхідність інфообміну у паралельному форматі кодових слів, що спричиняє до істотного навантаження на канали зв’язку, а також зумовлює низький рівень завадозахисту. Розвиток застосування методів подання цифрових повідомлень та їх теоретико-числових перетворень полягав у пізнішому застосуванні базисів дискретно-негармонічних функцій Уолша [3-5] та рекурсивно впорядкованих систем функцій [5-7]. Проте не були відомі аналітичні залежності побудови систем рекурсивно впорядкованих функцій та відповідних систем кодування даних, що унеможливлювало здійснення міжбазисних теоретико-числових перетворень. Проаналізуємо аналітику побудови дискретно-негармонічних базисних систем Уолша із дискретно-гармонічних базисів Радемахера та Грея, а також встановлені залежності синтезу систем функцій із рекурсивним впорядкуванням, які є основою рекурсивних методів кодування повідомлень, що володіють розширеним складом функціональних властивостей.

II. Синтез систем функцій Уолша

Застосування дискретно-гармонічних функцій Радемахера та Грея, що є похідними *sin*- та *cos*-гармонічних коливань, в якості базисних в основному було історично зумовлено простотою технічної реалізації якісних гармонічних генераторів. З впровадженням цифрової техніки стала можливою проста реалізація і інших дискретних залежностей, зокрема дискретно-негармонічних функцій як то Уолша [3-5] та рекурсивних Галуа [6-9]. Це спричинило до широкого розвитку математичних основ теоретико-числових перетворень, ґрунтуючись на яких реалізовано цифрові засоби формування, зв'язку, фільтрації, обробки повідомлень, що володіють покращеними техніко-економічними характеристиками.

Функції Уолша, впорядковані за Уолшем, Пелі, Адамаром, чи іншим чином, вміщують інваріантно повний набір функцій [3-5]. Нижче наведено у спрощеному вигляді із відображенням тільки порядків складових функцій $Wal_w i = Wal_w(n,\theta,i,)$ процедуру дискретного тригонометричного переходу до базису Уолша, впорядкованоіго за Уолшем, із базисів Радемахера $Radn = Rad(n,\theta)$ та Грея $Gryn = Gry(n,\theta)$.

$$Wal_w 0 = Rad0 = sign[sin\pi] = Gry\text{-}1 = sign[cos\pi/2]$$
$$Wal_w 1 = Rad1 = sign[sin2\pi] = Gry0 = sign[cos\pi]$$
$$Wal_w 2 = Rad1\ Rad2 = Gry1 = sign[cos2\pi]$$
$$Wal_w 3 = Rad2 = sign[sin4\pi]$$
$$Wal_w 4 = Rad2\ Rad3 = Gry2 = sign[cos4\pi]$$
$$Wal_w 5 = Rad1\ Rad2\ Rad3 = \begin{cases} Rad1\ Gry2 = sign[sin\,2\pi]\,sign[cos\,4\pi] \\ Gry1\ Rad3 = sign[cos\,2\pi]\,sign[sin\,8\pi] \end{cases}$$
$$Wal_w 6 = Rad1\ Rad3 = sign[sin2\pi]\ sign[sin8\pi]$$
$$Wal_w 7 = Rad3 = sign[sin8\pi]$$
$$Wal_w 8 = Rad3\ Rad4 = Gry3 = sign[cos8\pi]$$
$$Wal_w 9 = Rad1\ Rad3\ Rad4 = Rad1\ Gry3 = sign[sin2\pi]\ sign[cos8\pi]$$
$$Wal_w 10 = Rad1\ Rad2\ Rad3\ Rad4 = Gry1\ Gry3 = sign[cos2\pi]\ sign[cos8\pi]$$
$$Wal_w 11 = Rad2\ Rad3\ Rad4 = \begin{cases} Rad2\ Gry3 = sign[sin\,4\pi]\,sign[cos\,8\pi] \\ Gry2\ Rad4 = sign[cos\,4\pi]\,sign[sin\,16\pi] \end{cases}$$
$$Wal_w 12 = Rad2\ Rad4 = sign[sin4\pi]\ sign[sin16\pi]$$
$$Wal_w 13 = Rad1\ Rad2\ Rad4 = Gry1\ Rad4 = sign[cos2\pi]\ sign[sin16\pi]$$
$$Wal_w 14 = Rad1\ Rad4 = sign[sin2\pi]\ sign[sin16\pi]$$
$$Wal_w 15 = Rad4 = sign[sin16\pi]$$

Таким чином, приклад функцій Уолша, впорядкованих за Уолшем, або частості наведений на рис. 1, в своєму складі вміщує дискретно-гармонічні базиси Радемахера та Грея, а також набір мультиплікованих дискретно-негармонічних власне функцій Уолша $Wal_w(4,\theta,i)$. Базиси Радемахера і Грея в складі базису Уолша утворюють повні системи дискретно-гармонічних відповідно непарних та парних функцій, а вибіркові дискретно-негармонічні функції теж утворюють відповідно непарні та парні базисні складові [3-5].

III. Фазова взаємозалежність функцій Уолша

Із прикладу функцій Уолша четвертого порядку (рис. 2) можна встановити комплексну в парах взаємозалежність фаз функцій Уолша, упорядкованих за Уолшем [10]:

$$Wal_w(1,\theta,1) = Rad(1,\theta) = Wal_w(1,\theta,2) + \pi/2 = Gry(1,\theta) + \pi/2,$$
$$Wal_w(1,\theta,2) = Gry(1,\theta) = Wal_w(1,\theta,1) - \pi/2 = Rad(1,\theta) - \pi/2,$$
$$Wal_w(2,\theta,1) = Rad(2,\theta) = Wal_w(2,\theta,2) + \pi/4 = Gry(2,\theta) + \pi/4,$$
$$Wal_w(2,\theta,2) = Gry(2,\theta) = Wal_w(2,\theta,1) - \pi/4 = Rad(2,\theta) - \pi/4,$$
$$Wal_w(3,\theta,1) = Wal_w(3,\theta,2) - \pi/2,$$
$$Wal_w(3,\theta,2) = Wal_w(3,\theta,1) + \pi/2,$$
$$Wal_w(3,\theta,3) = Rad(3,\theta) = Wal_w(3,\theta,4) + \pi/8 = Gry(3,\theta) + \pi/8,$$
$$Wal_w(3,\theta,4) = Gry(3,\theta) = Wal_w(3,\theta,3) - \pi/8 = Rad(3,\theta) - \pi/8,$$
$$Wal_w(4,\theta,1) = Wal_w(4,\theta,2) + \pi/2,$$
$$Wal_w(4,\theta,2) = Wal_w(4,\theta,1) - \pi/2,$$
$$Wal_w(4,\theta,3) = Wal_w(4,\theta,4) - \pi/4,$$
$$Wal_w(4,\theta,4) = Wal_w(4,\theta,3) + \pi/4,$$

$$Wal_w(4,\theta,5) = Wal_w(4,\theta,6) - \pi/2,$$
$$Wal_w(4,\theta,6) = Wal_w(4,\theta,5) + \pi/2,$$
$$Wal_w(4,\theta,7) = Rad(4,\theta) = Wal_w(4,\theta,8)+\pi/16 = Gry(4,\theta)+\pi/16,$$
$$Wal_w(4,\theta,8) = Gry(4,\theta) = Wal_w(4,\theta,7)-\pi/16 = Rad(4,\theta)-\pi/16.$$

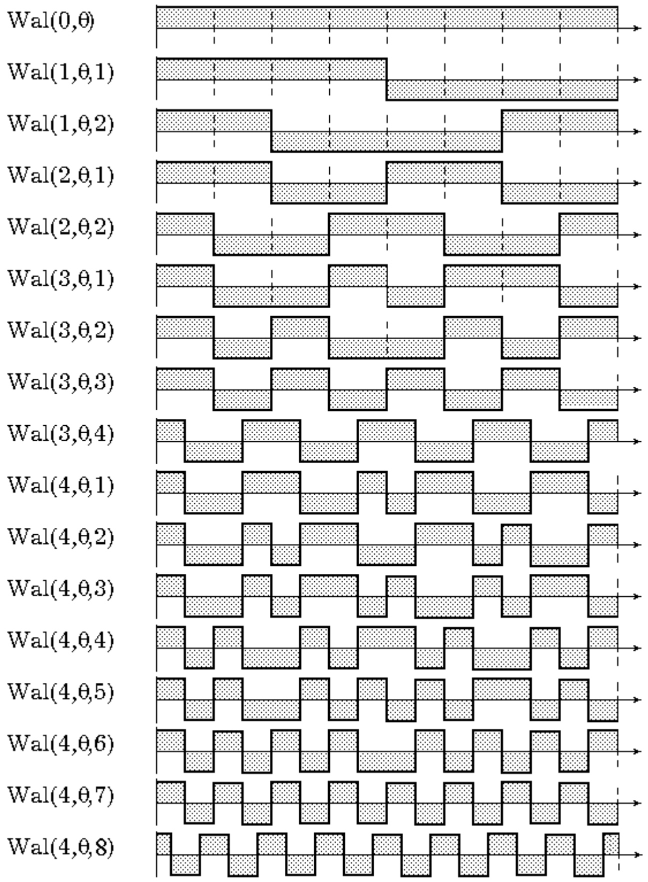

Рис. 1. Функції Уолша, впорядковані за Уолшем

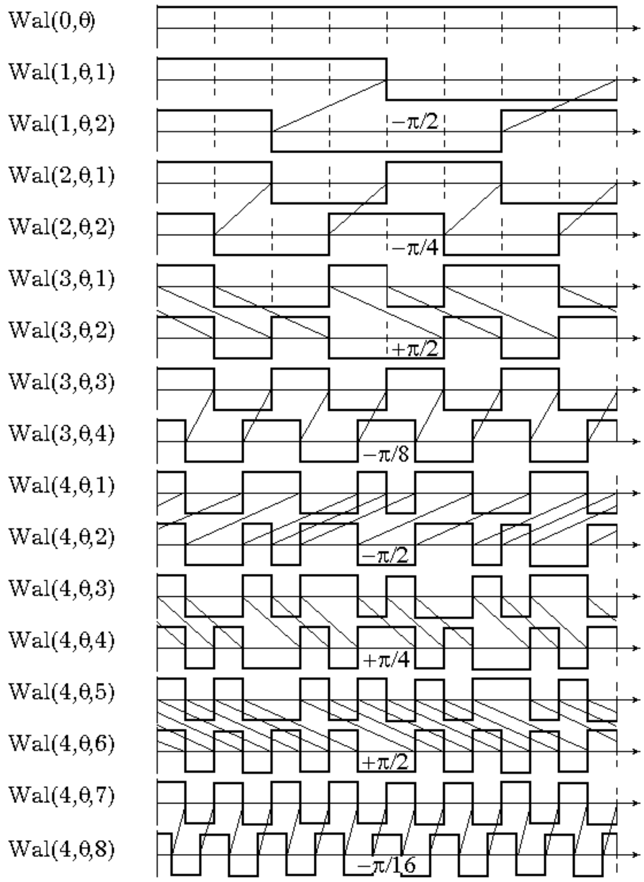

Рис. 2. Фазова взаємозалежність функцій Уолша

У всякому довільному повному базисному наборі функцій Уолша для кожного із порядкових згідно визначеного n значень максимальний степінь дискретизації по часу або мінімальний крок θ становить $\Delta\theta_n = \pi/2^n$ із всіма значеннями $n\Delta\theta_n = n\pi/2^n$, де $n = n, n-1, \dots, 1, 0$, а також із повним доповненням базису набором функцій молодших порядків i із відповідним дискретним заповненням $\Delta\theta_i = \pi/2^i$, де для кожного n $i = i, i-1, \dots, 1, 0$.

Таким чином, шляхом екстракції власне *sin*- та *cos*-складових із набору функцій Уолша отримуємо базиси Радемахера та Грея, на основі чого можна твердити, що базис Уолша вміщує повні дискретно-гармонічні базиси Радемахера та Грея, а також набір дискретно-негармонічних функцій, останні є повною мультиплікативною групою функцій Радемахера-Грея.

За отриманими результатами досліджень можна твердити, що базис Уолша є функціонально повним і дозволяє у розширеному функціональному складі здійснити аналіз досліджуваних залежностей інформаційних чи інших процесів оточення. Така властивість з іншого боку спричиняє значну функціональну базисну надлишковість функцій Уолша, зумовлену тим, що інформаційна потужність базису становить $P = N^2$, де N- модуль перерахунку системи [11]. З метою переходу до більш ефективних базисних рекурсивних впорядкувань функцій (так званих Галуа), здійснимо кілька дискретних теоретико-числових перетворень.

IV. Синтез систем функцій із рекурсивним впорядкуванням

Аналогічно до впорядкувань функцій Уолша за відомими правилами Уолша, Пелі, Адамара [3-6], автором вперше вводиться рекурсивне впорядкування функцій $Wal_r i$ базису Уолша, що дозволяє синтезувати нові базисні впорядкування, на основі яких, в свою чергу, будуються системи функцій та системи рекурсивного кодування. З метою спрощення викладок, застосуємо спрощений метод позначень складових функцій в системах, як це зроблено в [4] із наскрізною нумерацією всіх складових $Wal\ i$ за вищим порядком (як на рис. 3), а не із визначенням кожної функції за її індивідуальною нумерацією як складових відповідних нижчих порядків $Wal(n,\theta,i)$ (як на рис. 1 і 2).

$$Wal_r0 = Wal_w0 = Rad0 = sign[sin\pi] = Gry\text{-}1 = sign[cos\pi/2]$$
$$Wal_r1 = Wal_w1 = Rad1 = sign[sin2\pi] = Gry0 = sign[cos\pi]$$
$$Wal_r2 = Wal_w3 = Rad2 = sign[sin4\pi]$$
$$Wal_r3 = Wal_w7 = Rad3 = sign[sin8\pi]$$
$$Wal_r4 = Wal_w15 = Rad4 = sign[sin16\pi]$$
$$Wal_r5 = Wal_w14 = Rad1\ Rad4 = sign[sin2\pi]\ sign[sin16\pi]$$
$$Wal_r6 = Wal_w13 = Rad1\ Rad2\ Rad4 = Gry1\ Rad4 = sign[cos2\pi]\ sign[sin16\pi]$$
$$Wal_r7 = Wal_w10 = Rad1\ Rad2\ Rad3\ Rad4 = Gry1\ Gry3 = sign[cos2\pi]\ sign[cos8\pi]$$
$$Wal_r8 = Wal_w5 = Rad1\ Rad2\ Rad3 = \begin{cases} Rad1\ Gry2 = sign[sin\ 2\pi]\ sign[cos\ 4\pi] \\ Gry1\ Rad3 = sign[cos\ 2\pi]\ sign[sin\ 8\pi] \end{cases}$$
$$Wal_r9 = Wal_w11 = Rad2\ Rad3\ Rad4 = \begin{cases} Rad2\ Gry3 = sign[sin\ 4\pi]\ sign[cos\ 8\pi] \\ Gry2\ Rad4 = sign[cos\ 4\pi]\ sign[sin\ 16\pi] \end{cases}$$
$$Wal_r10 = Wal_w6 = Rad1\ Rad3 = sign[sin2\pi]\ sign[sin8\pi]$$
$$Wal_r11 = Wal_w12 = Rad2\ Rad4 = sign[sin4\pi]\ sign[sin16\pi]$$
$$Wal_r12 = Wal_w9 = Rad1\ Rad3\ Rad4 = Rad1\ Gry3 = sign[sin2\pi]\ sign[cos8\pi]$$
$$Wal_r13 = Wal_w2 = Rad1\ Rad2 = Gry1 = sign[cos2\pi]$$
$$Wal_r14 = Wal_w4 = Rad2\ Rad3 = Gry2 = sign[cos4\pi]$$
$$Wal_r15 = Wal_w8 = Rad3\ Rad4 = Gry3 = sign[cos8\pi]$$

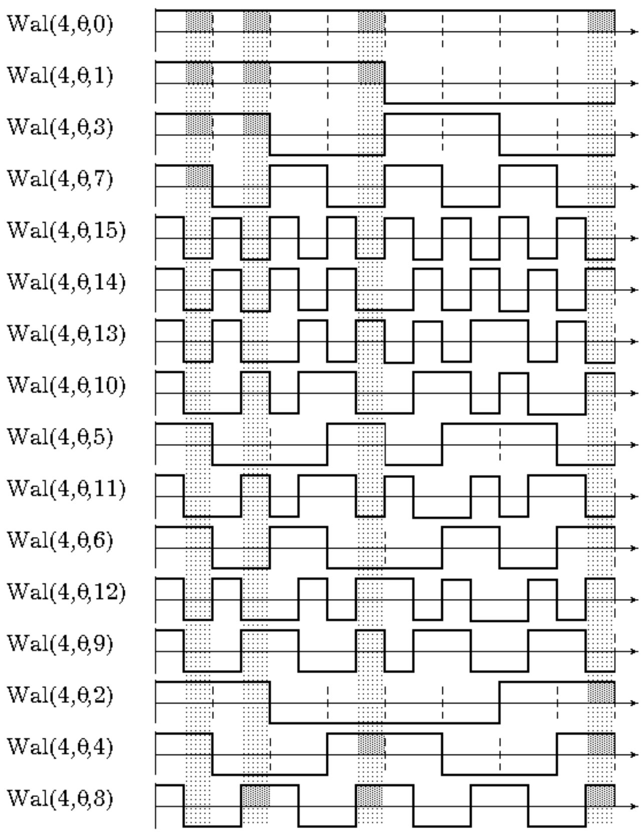

Рис. 3. Базис рекурсивно впорядкованих функцій Уолша

Для прикладу функцій Уолша четвертого порядку (рис. 2) можна встановити наступну комплексну взаємозалежність фаз функцій Уолша в парах із рекурсивним упорядкованням [9]:

$$Wal_r0 = Wal_w0$$
$$Wal_r1 = Wal_r13 + \pi/2,$$
$$Wal_r13 = Wal_r1 - \pi/2,$$
$$Wal_r2 = Wal_r14 + \pi/4,$$
$$Wal_r14 = Wal_r2 - \pi/4,$$
$$Wal_r8 = Wal_r10 - \pi/2,$$
$$Wal_r10 = Wal_r8 + \pi/2,$$
$$Wal_r3 = Wal_r15 + \pi/8,$$
$$Wal_r15 = Wal_r3 - \pi/8,$$
$$Wal_r12 = Wal_r7 + \pi/2,$$
$$Wal_r7 = Wal_r12 - \pi/2,$$
$$Wal_r9 = Wal_r11 - \pi/4,$$
$$Wal_r11 = Wal_r9 + \pi/4,$$
$$Wal_r6 = Wal_r5 - \pi/2,$$
$$Wal_r5 = Wal_r6 + \pi/2,$$
$$Wal_r4 = Wal_rX + \pi/16,$$
$$Wal_rX = Wal_r4 - \pi/16.$$

За необхідності базис функцій Уолша із рекурсивним впорядкуванням можна подати згідно його натурального упорядкування із визначеною фазовою залежністю із відповідними функціями:

$$Wal_r0 = Wal_w0$$
$$Wal_r1 = Wal_r13 + \pi/2,$$
$$Wal_r2 = Wal_r14 + \pi/4,$$
$$Wal_r3 = Wal_r15 + \pi/8,$$
$$Wal_r4 = Wal_rX + \pi/16,$$
$$Wal_r5 = Wal_r6 + \pi/2,$$
$$Wal_r6 = Wal_r5 - \pi/2,$$
$$Wal_r7 = Wal_r12 - \pi/2,$$

$Wal_r 8 = Wal_r 10 - \pi/2,$
$Wal_r 9 = Wal_r 11 - \pi/4,$
$Wal_r 10 = Wal_r 8 + \pi/2,$
$Wal_r 11 = Wal_r 9 + \pi/4,$
$Wal_r 12 = Wal_r 7 + \pi/2,$
$Wal_r 13 = Wal_r 1 - \pi/2,$
$Wal_r 14 = Wal_r 2 - \pi/4,$
$Wal_r 15 = Wal_r 3 - \pi/8,$
$Wal_r X = Wal_r 4 - \pi/16.$

Аналогічно, як для функцій Уолша, упорядкованих за Уолшем, у всякому довільному повному базисному наборі рекурсивно впорядкованих функцій Уолша для кожного із порядкових по n значень максимальний степінь дискретизації по часу або мінімальний крок θ становить $\Delta\theta_n = \pi/2^n$ із всіма значеннями $n\Delta\theta_n = n\pi/2^n$, а також із повним доповненням базису набором функцій молодших порядків i із відповідним дискретним заповненням $\Delta\theta_i = \pi/2^i$.

Висновки

Здійснено аналіз базису Уолша як системи дискретних функцій, що складається із базисів дисктерно-гармонічних функцій Радемахера і Грея, а також системи дискретно-негармонічних функцій Уолша. Встановлено фазові взаємозалежності складових функцій Уолша між собою в парах. Визначено нову систему із рекурсивним впорядкуванням функцій в базисі Уолша, яка є основою побудови систем рекурсивно впорядкованих функцій та методів рекурсивного кодування, що обґрунтовує перспективу подальших досліджень. Встановлено також фазові взаємозалежності рекурсивно впорядкованих функцій в парах та згідно натурального їх впорядкування. Представлені результати досліджень є проміжним етапом дослідження властивостей та встановлення аналітичних залежностей міжбазисних теоретико-числових перетворень та відповідних їм систем кодування повідомлень.

Література References

[1] L. B. Petryshyn Theory of digital data processing in the ICT. In monography Advances in ICT for Business, Industry and Public Sector. Springer International Publishing Switzerland. 2015. –pp. 157-170.

[2] L. B. Petryshyn Theoretical foundation of digital signal processing. Information and Communication Technologies - International Conference (ICTIC 2013) 25–29.03.2013. Slovakia. – pp. 352-357.

[3] J. A. Gumaer The discrete Walsh transform as an alternative to the discrete Fourier transform. University of Texas at Austin, 1990. - 210 с.

[4] Л. А. Залманзон Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. - М.: Наука, 1989. - 496 с.

[5] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. ЛКИ Москва, 2008, Изд.2, испр. и доп. 2008. - 352 с.

[6] T. K. Moon Error Correction Coding: Mathematical Methods and Algorithms. Wiley, 2005. - 750 с.

[7] L. B. Petryshyn Recursive error-corrected coding of number-impulse data sources in telecommunication systems. 2013 23th Int. Crimean Conf. "Microwave & Telecommunication Technology" (CriMiCo'2013). Sevastopol, 2013, pp. - 547-548.

[8] Л. Б. Петришин, М. Л. Петришин Синтез системы дискретных рекурсивных функций и свойства систем рекурсивного кодирования данных. Системи Обробки Інформації. –Харків: ХУПС, 2013. – С. 46-51.

[9] Л. Б. Петришин, М. Л. Петришин Теоретичні та методичні основи формування рекурсивних кодових послідовностей. // Системи Обробки Інформації. –Харків: ХУПС, 2014. – С. 12-19.

[10] Л. Петришин Про фазову взаємозалежність і можливість редукції системи функцій Уолша. International Journal of Computing, 2013, Том 12, Випуск 2, ISSN 1727-6209, - С. 125-132. About phase interdependence and possibility of Walsh functions system reduction. – с. 125-132.

[11] В. М. Муттер Основы помехоустойчивой телепередачи информации. - М.: Энергоатомиздат, 1990. - 288 с.