

# Алгоритм ортогонального перетворення в системах функцій Галуа

Н.В. Превисокова  
кафедра інформатики  
Прикарпатський національний університет  
імені Василя Стефаника  
Івано-Франківськ, Україна  
natvolo@rambler.ru

## Algorithm orthogonal transform on the Galois functions base

N. Prevysokova  
Department of Computer Science  
Vasyl Stefanyk Precarpathian  
National University  
Ivano-Frankivsk, Ukraine  
natvolo@rambler.ru

**Анотація**—Здійснено факторизацію матриць ортогональних систем функцій Галуа та розроблено алгоритм обчислення дискретного ортогонального перетворення в даному базисі. Визначено часову складність розробленого алгоритму.

**Abstract**—It is considered two algorithms of discrete orthogonal transform on Galois functions base. The proposed algorithm is based on the procedure matrix factorization. It is done matrix factorization of orthogonal Galois functions. It is developed the calculating algorithm of discrete orthogonal transform in this basis. The time complexity of this algorithm is evaluated. The efficiency of the developed algorithm is proved.

**Ключові слова**—системи функцій Галуа; дискретне ортогональне перетворення; алгоритм перетворення; факторизація матриць

**Keywords**—Galois functions system; discrete orthogonal transform; transform algorithm; matrix factorization

### I. ВСТУП

Методи обробки інформації на основі ортогональних перетворень широко застосовуються на практиці в галузі цифрової обробки сигналів. Дискретні перетворення дозволяють подати дискретні в часі сигнали в частотних координатах. Найчастіше у задачах цифрової обробки інформації використовуються дискретні перетворення Фур'є, косинусне, Уолша, Хаара та ін. [1, 2]. Підвищення вимог до швидкості реалізації методів і процедур обробки інформації зумовлює необхідність розробки швидких

алгоритмів обчислення, які дозволяють зменшити час виконання дискретних перетворень [1-2]. У практиці до цього часу широке застосування дискретного ортогонального перетворення в системах функцій Галуа [3] обмежувалось часовою складністю алгоритму обчислення перетворення прямим методом.

Автором розвивається напрямок дослідження та розробки швидких алгоритмів дискретних перетворень в системах функцій Галуа шляхом вирішення задачі факторизації матриць та розробки алгоритму обчислення дискретного ортогонального перетворення в системах функцій Галуа.

### II. ОСНОВИ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ В СИСТЕМАХ ФУНКЦІЙ ГАЛУА

Базисом дискретного перетворення в системах функцій Галуа [3] є ортогональна система  $\{G(n, \theta, i)\}$  порядку  $n$ , на інтервалі  $\theta \in [0; 1)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$  [3], одержана ортогоналізацією рекурсивної системи функцій Галуа.

Рекурсивна система функцій Галуа  $\{Gal(n, \theta, i)\}$  [2], утворюється із рекурсивної послідовності  $g_0 \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_{2^n - 1}$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ , утвореної відповідно до породжуючого вектора поля Галуа  $GF(2^n)$ .

Функції  $\{Gal(n, \theta, i)\}$  в точках  $\theta = j/N$ ,  $N = 2^n$  визначаються із послідовності  $g_j$  [2]

$$Gal(n, \theta, 0) = Gal(n, j/N, 0) = 1 - 2g_j,$$

$$Gal(n, \theta, i+1) = Gal(n, \theta + 1/N, i).$$

Відповідно до наведених процедур формування, матриці рекурсивних систем функцій Галуа є тоепліцевими циклічними або ганкелевими антициклічними (циркулянтами) [2].

Із рекурсивної системи  $\{Gal(n, \theta, i)\}$  будується модифікована система  $Gal_m(n, \theta, i)$

$$Gal_m(n, \theta, 0) = 1; Gal_m(n, \theta, i) = Gal(n, \theta, i-1). \quad (1)$$

Ортогональні функції  $\{G(n, \theta, i)\}$  [3] одержують застосуванням процедури ортогоналізації Грама – Шмідта

$$G(n, \theta, 0) = 1,$$

$$G(n, \theta, k+1) = Gal_m(n, \theta, k+1) - \sum_{i=0}^k \frac{\langle Gal_m(n, \theta, k+1), G(n, \theta, i) \rangle}{\|G(n, \theta, i)\|_{L_2}^2} G(n, \theta, i), \quad (2)$$

де  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $\|G(n, \theta, i)\|_{L_2}^2$  – норма в просторі  $L_2[0,1)$  інтегровних з квадратом функцій,  $\langle Gal_m(n, \theta, k+1), G(n, \theta, i) \rangle$  – скалярний добуток.

Дискретне матричне ортогональне перетворення Галуа [3] одновимірного інформаційного потоку  $\{X(0), X(1), \dots, X(N-1)\}$  визначається як добуток

$$Y = GX, \quad (3)$$

де  $Y = [Y(0), Y(1), \dots, Y(N-1)]^T$  – вектор спектральних коефіцієнтів перетворення Галуа,  $G$  – матриця розміру  $N \times N$  значень ортогональних функцій Галуа.

Прямий метод обчислень згідно (3) вимагає  $N(N-1)$  арифметичних операцій типу додавання-віднімання та  $(N-n-1)(N-1)$  перемножень.

### III. АЛГОРИТМ ПЕРЕТВОРЕННЯ

У результаті дослідження залежностей (2) здійснено факторизацію матриці перетворення  $G$  і подання її у формі добутку матриць

$$G = C \times Gal_m, \quad (4)$$

де  $C$  – трикутна матриця ортогоналізації  $N \times N$ ,  $Gal_m$  – матриця значень функцій  $\{Gal_m(n, \theta, i)\}$  в точках  $\theta = j/N$ .

Елементи матриці  $C$  є дійсними числами, які визначаються рекурсивно

$$c_{k+1, j} = Gal_m(n, \frac{j}{N}, k+1) - \sum_{i=0}^k \frac{\sum_{l=0}^{N-1} c_{il} \cdot Gal_m(n, \frac{l}{N}, k+1)}{\sum_{l=0}^{N-1} (c_{il})^2} c_{ij}.$$

Встановлено, що для всіх  $k \leq n$ ,  $j \leq n$  елементи матриці  $C$  задовольняють умови  $c_{kk} = 1$ ;  $c_{kj} = 0$ ,  $k > j$ .

Із використанням факторизації (4) перетворення (3) запишеться у формі

$$Y = C \cdot Gal_m \cdot X. \quad (5)$$

Тоепліцева циклічна структура матриці  $Gal_m$  визначає можливість застосування алгоритмів обчислення згорток і швидкого перетворення Фур'є при виконанні перетворень.

На основі факторизації матриць розроблено наступний алгоритм обчислення перетворення (5):

1) множення вхідного інформаційного вектора на циркулянт за допомогою швидких алгоритмів обчислення згорток, наведених в [4].

2) множення результату на трикутну матрицю ортогоналізації  $C$ , відому для даного перетворення.

Здійснено дослідження та визначено часову складність запропонованого алгоритму.

### ВИСНОВКИ

Таким чином, здійснено факторизацію матриць ортогональних систем функцій Галуа, на основі чого розроблено алгоритм обчислення дискретного ортогонального перетворення в даному базисі.

Встановлено, що часова складність розробленого алгоритму є меншою, порівняно із відомим прямим методом обчислень, що забезпечує можливість ефективного застосування даного перетворення у методах цифрової обробки одновимірних інформаційних потоків.

### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Л. А. Залманзон, Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении связи и других областях, М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
- [2] Л. Б. Петришин, Теоретичні основи перетворення форми та цифрової обробки інформації, К.: ІЗІМН МОУ, 1997.
- [3] Н. В. Превисокова, Метод обробки інформації на основі дискретного ортогонального перетворення Галуа // Вісник Хмельницького нац. ун-ту. Технічні науки. – 2010. – № 2 (146). – С.149–156.
- [4] В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами, М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.