

# Моделювання стаціонарних процесів теплопровідності в тілах випадкової структури з використанням діаграм Фейнмана

О.Ю. Чернуха  
відділ математичного моделювання  
нерівноважних процесів

Центр математичного моделювання  
Інституту прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С.Підстригача НАН України  
Львів, Україна  
cher@cmm.lviv.ua

## Modeling steady-state processes of heat transfer in bodies of random structure using Feynmann diagrams

O. Chernukha  
Department of mathematical modeling  
nonequilibrium processes

Centre of Mathematical Modeling of Pidstryhach Institute  
for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,  
Ukrainian Academy of Sciences  
Lviv, Ukraine  
cher@cmm.lviv.ua

**Анотація**—Робота присвячена математичному моделюванню стаціонарних процесів теплопровідності у випадково неоднорідних багатофазних структурах. Крайовій задачі теплопровідності поставлено у відповідність інтегродиференціальне рівняння з випадковим ядром, розв'язок якого побудований у вигляді ряду Неймана. З допомогою техніки діаграм Фейнмана отримано аналоги рівнянь Дайсона і Бета-Солпітера для стаціонарних процесів теплопровідності у багатофазних стохастично неоднорідних тілах.

**Abstract**—The work is devoted to mathematical modeling steady-state processes of heat transfer in randomly nonhomogeneous multiphase structures. An integro-differential equation with random kernel, which solution is constructed in terms of Neumann series, is obtained in accordance with the boundary value problem of heat transfer. By using the technique of Feynman diagrams analogues of equations of both Dayson and Bethe-Salpeter for the steady-state heat transfer processes in multiphase stochastically nonhomogeneous bodies are obtained.

**Ключові слова**—математичне моделювання; теплопровідність; стохастична структура; діаграма Фейнмана

**Keywords**—mathematical modeling; heat transfer; stochastic structure; Feynmann diagram

### I. ВСТУП

Стохастичний характер теплових полів, як правило, спричинений недостатньою інформацією про неоднорідну структуру середовища [1]. При дослідженні теплових полів у випадково неоднорідних тілах (рис.1) розробляють методи, які використовують умову ергодичності (квазі-ергодичності, тобто поля є ергодичними лише в об'ємах,

малих порівняно з характерними масштабами змін статистичних характеристик поля) досліджуваних процесів [2, 3], при постановці крайових задач записують рівняння, отримання яких вимагає введення фізично малого репрезентативного елемента тіла, що накладає обмеження на відповідні випадкові поля. Нижче за допомогою техніки діаграм Фейнмана досліджується в стаціонарному режимі процес теплопровідності у випадково неоднорідних тілах для довільних розмірів включень. При цьому джерела тепла описуються детермінованою функцією, а структура тіла є випадковою.

### II. МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ТІЛАХ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ

Нехай в багатофазному тілі з випадково розташованими неоднорідностями (рис. 1) протікають процеси теплопровідності. Тіло складається з  $N$  різних за густиною фаз (матриці та включень), в яких теплофізичні властивості можуть істотно відрізнятися. При цьому точна геометрична конфігурація фаз невідома.

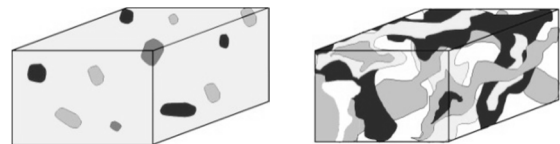


Рис. 1. Можливі реалізації багатофазної структури тіла

Розподіл випадкового температурного поля  $T(\vec{r})$  в такому тілі у стаціонарному випадку описує рівняння теплопровідності

$$L(\vec{r})T(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla}(\lambda(\vec{r})\vec{\nabla}T(\vec{r})) = f(\vec{r}), \quad (1)$$

де  $L(\vec{r})$  - випадковий оператор рівняння теплопровідності,  $\vec{r}$  - радіус-вектор біжучої точки,  $\lambda(\vec{r})$  - випадковий коефіцієнт теплопровідності,  $f(\vec{r})$  - густина джерел тепла (детермінована функція). Вважаємо, що на поле температури  $T(\vec{r})$  накладені детерміновані граничні умови.

Гранична задача (1) зведена до інтегро-диференціального рівняння типу Гаммерштейна:

$$T(\vec{r}) = T_0(\vec{r}) + \int_{(V)} G(\vec{r}, \vec{r}') L_s(\vec{r}') T(\vec{r}') d\vec{r}', \quad (2)$$

де  $T_0(\vec{r})$  - розв'язок «однорідної» задачі:

$$\bar{L}(\vec{r})T_0(\vec{r}) - f(\vec{r}) = 0 \quad (3)$$

з вихідними граничними умовами;  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  - детермінована функція Гріна, яка є розв'язком рівняння з точковим джерелом

$$\bar{L}(\vec{r})G(\vec{r}, \vec{r}') - f(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4)$$

за відповідних нульових граничних умов;  $L_s(\vec{r})$  - випадковий оператор вигляду

$$L_s(\vec{r}) = \bar{L}(\vec{r}) - L(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{\lambda} - \lambda_j) \eta_{ij}(\vec{r}) \Delta + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n_j} [\lambda(\vec{r})]_{\Gamma_{ij}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_{ij}}) \vec{\nabla},$$

де  $\bar{\lambda} = \overline{\lambda(\vec{r})}$  - усереднений за ансамблем реалізацій структури коефіцієнт теплопровідності,  $\eta_{ij}(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \vec{r} \in (V_i^{(j)}) \\ 0, & \vec{r} \notin (V_i^{(j)}) \end{cases}$  - випадкова функція просторових координат,  $[\lambda(\vec{r})]_{\Gamma_{ij}}$  - вектор-функція стрибка коефіцієнта теплопровідності на міжфазних границях,  $(V_i^{(j)})$  - однозв'язна область з об'ємом  $V_i^{(j)}$ , яку займає  $i$ -те включення  $j$ -ї фази.

Розв'язок рівняння (2) будуємо методом послідовних наближень, вибираючи за нульове наближення розв'язок задачі (3). Тоді отримаємо рекурентні співвідношення, яким ставимо у відповідність ряд Неймана

$$T(\vec{r}) = T_0(\vec{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\vec{r}), \quad (5)$$

Тут  $R_n(\vec{r})$  - різниця між  $n$ -м та  $(n-1)$ -м членами.

Встановлено умови і доведено теорему про абсолютну і рівномірну збіжність цього ряду [4]. На відміну від

нестационарного випадку, коли для збіжності ряду Неймана для випадкового поля температури достатньо умови обмеженості теплофізичних коефіцієнтів фаз та відмінності від нуля параметрів матриці, для стаціонарної теплопровідності необхідна додаткова умова на обмеженість об'єму тіла або обмеженість об'єму, які займають включення. Також сформульовано і доведено теорему існування розв'язку інтегро-диференціального рівняння.

Щоб дослідити структуру ряду (5), введено графічне зображення його елементів у вигляді діаграм Р. Фейнмана [5]. Тоді ряд (5) у графічному вигляді набуде вигляду [6]:

$$\begin{aligned} \sphericalangle &= \sim + \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'} \text{---} + \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}''} \text{---} + \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}''} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'''} \text{---} + \\ &+ \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}''} \text{---} \dots \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}^{(n-1)}} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}^{(n)}} \text{---} + \dots \end{aligned} \quad (5a)$$

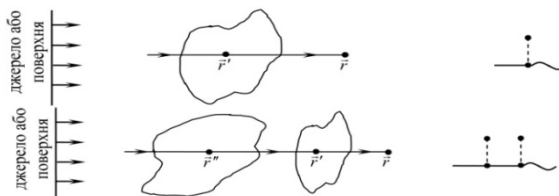
де  $T(\vec{r}) \sim \sphericalangle$ ,  $T_0(\vec{r}) \sim \sim$ ,  $G(\vec{r}', \vec{r}'') \sim \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}''} \text{---}$ ,  $L_s(\vec{r}) \sim \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'} \text{---}$ .

Усереднене за ансамблем конфігурацій фаз теплове поле можна подати так

$$\begin{aligned} \text{---} &= \sim + \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'} \text{---} + \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}''} \text{---} + \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}''} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'''} \text{---} + \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}''} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'''} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}^{(4)}} \text{---} + \\ &+ \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}''} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'''} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}^{(4)}} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}^{(5)}} \text{---} + \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}''} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'''} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}^{(4)}} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}^{(5)}} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}^{(6)}} \text{---} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Тут  $\langle T(\vec{r}) \rangle \sim \text{---}$ ,  $\psi_k(\vec{r}', \vec{r}'', \dots, \vec{r}^{(k)}) \sim \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}'} \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}''} \text{---} \dots \text{---} \overset{\bullet}{\vec{r}^{(k)}} \text{---}$

Діаграми Фейнмана, за допомогою яких представлений ряд Неймана (6), мають прозору фізичну інтерпретацію. Діаграма 1 з ряду (6) описує поширення теплового поля з джерела або від поверхні (в залежності від граничних умов та наявності внутрішніх джерел тепла) в однорідному середовищі. Діаграма 2 описує наступний процес: теплове поле поширюється від джерела до точки  $\vec{r}'$  як в однорідному середовищі. В точці  $\vec{r}'$  відбувається збурення теплового поля за рахунок того, що ця точка належить включенню або його границі (належність  $\vec{r}'$  до включення визначає усереднений оператор  $\langle L_s(\vec{r}') \rangle$ , в іншому випадку він дорівнює нулю). Далі збурене поле досягає точки  $\vec{r}$ , в якій відбувається спостереження (рис.2а).



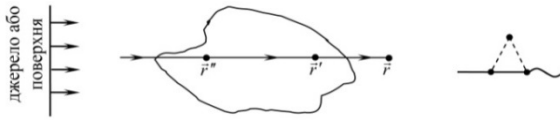


Рис. 2. Одно- та двократні збурення теплового поля

Діаграма 3 відповідає поширенню теплового поля від джерела до точки  $\vec{r}''$ , яка знаходиться у включенні (оператор  $\langle L_s(\vec{r}'') \rangle$ ), де отримує збурення, потім збурене поле поширюється до точки  $\vec{r}'$ , яка належить іншому включенню (оператор  $\langle L_s(\vec{r}') \rangle$ ), і отримує друге збурення; потім двічі збурене поле поширюється до точки спостереження  $\vec{r}$  (рис. 2б). Діаграма 4 відрізняється від 3 наявністю кореляційної функції  $\Psi_2(\vec{r}', \vec{r}'')$ , що вказує на те, що дві точки збурення  $\vec{r}'$  і  $\vec{r}''$  корельовані, тобто обидва збурення відбулися у тій самій неоднорідності (рис. 2в).

Всі діаграми третього порядку 5 - 9 містять функції  $T_0(\vec{r}''')$ ,  $G(\vec{r}'', \vec{r}''')$ ,  $G(\vec{r}', \vec{r}''')$ ,  $G(\vec{r}, \vec{r}')$ . Це означає, що теплове поле поширилось до точки  $\vec{r}$  після збурення в точці  $\vec{r}'$ , до точки  $\vec{r}'$  - після збурення в точці  $\vec{r}''$  і т. п. Отже, всі ці діаграми описують трикратне збурення теплового поля. Проте діаграми 5 - 9 є топологічно різними. Діаграма 5 не містить кореляційних функцій, тобто три збурення теплового поля відбулися в різних неоднорідностях. В діаграмах 6 - 8 наявні кореляційні функції  $\Psi_2(\vec{r}'', \vec{r}''')$ ,  $\Psi_2(\vec{r}', \vec{r}''')$  і  $\Psi_2(\vec{r}', \vec{r}''')$  відповідно. Це означає, що поле збурюється тричі у двох неоднорідностях (рис. 3а-3в).

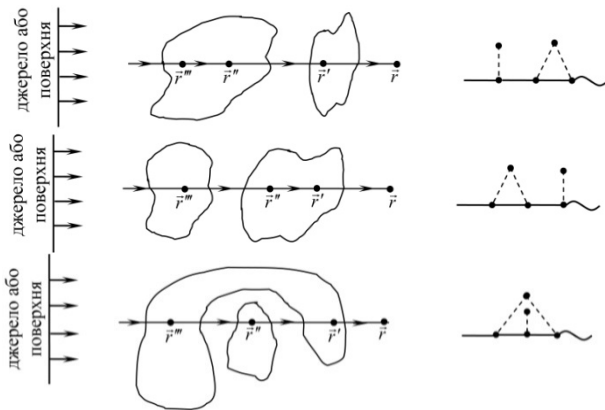


Рис. 3. Трикратні збурення теплового поля

Подання розв'язку задачі (1) у вигляді сукупності діаграм (6) дозволяє перетворювати ряд Неймана, використовуючи топологічні ознаки діаграм, які містить розв'язок.

Суму ряду (6) можна подати через суму деякої нескінченної підпослідовності цього ж ряду. Для цього вводимо класифікацію діаграм на сильно- і слабкозв'язані, що входять у (6) [7]. Після виділення сильнозв'язаних діаграм встановлено, що ряд (6) є розв'язком рівняння Дайсона

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \circ \text{---}, \quad (7)$$

$$\text{---} \circ \text{---} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$$

де  $\Sigma(\vec{r}) \sim$

ядро масового оператора [3]. Рівняння Дайсона (7) в аналітичній формі має вигляд

$$\langle T(\vec{r}) \rangle = T_0(\vec{r}) + \int_{(V)} G(\vec{r}, \vec{r}') \Sigma(\vec{r}') \langle T(\vec{r}') \rangle d\vec{r}'. \quad (7a)$$

Застосуємо до рівняння Дайсона (7) оператор  $\bar{L}(\vec{r}) = \bar{\lambda} \Delta$ . Тоді отримаємо

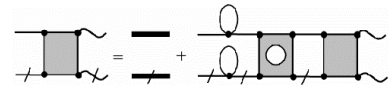
$$\bar{\lambda} \Delta \langle T(\vec{r}) \rangle = \lambda \Delta T_0(\vec{r}) + \int_{(V)} \bar{\lambda} \Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}') \Sigma(\vec{r}') \langle T(\vec{r}') \rangle d\vec{r}'. \quad (8)$$

Згідно з формулою (3) перший доданок рівняння (8)  $\bar{\lambda} \Delta T_0(\vec{r}) = f(\vec{r})$ , а зі співвідношення (4) випливає, що  $\bar{\lambda} \Delta_r G = \delta(\vec{r} - \vec{r}') - f(\vec{r})$ . Тоді з використанням парності дельта-функції отримаємо

$$\bar{\lambda} \Delta \langle T(\vec{r}) \rangle - \Sigma(\vec{r}) \langle T(\vec{r}) \rangle + f(\vec{r}) \left[ 1 - \int_{(V)} \Sigma(\vec{r}') \langle T(\vec{r}') \rangle d\vec{r}' \right] = 0. \quad (9)$$

Із порівняння (3) і (9) випливає, що на відміну від  $T_0(\vec{r})$ , функція  $\langle T(\vec{r}) \rangle$  задовольняє не диференціальне, а інтегро-диференціальне рівняння. З фізичної точки зору це означає, що усереднене поле в деякій точці  $\vec{r}$  залежить і від оточуючих цю точку неоднорідностей (за рахунок ядра масового оператора  $\Sigma(\vec{r})$ ).

З використанням техніки діаграм Фейнмана одержано рівняння типу Бете-Солпітера для функції когерентності, яке описує функцію кореляції стаціонарних температурних полів у багатофазних тілах стохастичної структури



Отже, подання розв'язку задачі у вигляді сукупності діаграм дозволяє перетворювати ряд теорії збурень, використовуючи топологічні ознаки діаграм, які входять у розв'язок. Також застосування такої техніки дає можливість виразити суму ряду Неймана через суму деякої нескінченної підпослідовності цього ж ряду.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Fu W.S., Wang K.-N., Ke W.-W. "Heat transfer of porous medium with random porosity model in a laminar channel flow", in J. of the Chinese Institute of Engineers, 2001, 24, N 4, P. 431-438.
- [2] Л.П. Хорошун "Методы случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микро неоднородных тел", в Прикл. механика, 1978, 14, № 2, С. 3-17.
- [3] С.М. Рытов, Ю.А.Кравцов, В.И.Татарский Введение в статистическую радиофизику. Ч.II Случайные поля, М.: Наука, 1978, 436 с.
- [4] О.Ю. Чернуха, П.Р. Пелех "Стационарні процеси теплопровідності в тілах випадково неоднорідної структури", Математичні методи і фізико-механічні поля, 2012, Т. 55, № 1, С. 179-187.
- [5] Р. Фейнман, А. Хиббс. Квантовая механика и интегралы по траекториям, М.: Мир, 1968, 454 с.
- [6] Y Chaplia., O. Chernukha "Physical-mathematical modelling dafusion processes in bodies of random structure using generalized functions and Feynman diagrams" in Int. J. Eng.Science, 2005, 43, № 17-18, P. 1337-1348.