Чисельне інтегрування табличних функцій з використанням многочлена Тейлора

Ю.І. Грицюк
кафедра програмного забезпечення,
Національний університет "Львівська політехніка"
Львів, Україна
yurii.i.hrytsiuk@lpnu.ua

М.Ю. Грицюк
кафедра інформаційних технологій та
телекомунікацій, Львівський ДУ БЖД
Львів, Україна
mariana.grytsiuk@gmail.com

Numerical integration of table functions using Taylor polynomial

Yu.I. Grytsyuk
Software Department,
Lviv Polytechnic National University
Lviv, Ukraine
yurii.i.hrytsiuk@lpnu.ua

M.Yu. Grytsiuk
Department of Information Technology and
Telecommunications, Lviv State University of Life Safety
Lviv, Ukraine
mariana.grytsiuk@gmail.com

***Анотація*—Обґрунтовано потребу чисельного інтегрування табличних функції з використанням многочлена Тейлора. Встановлено, що у багатьох практичних задачах первісну від підінтегральної функції не завжди вдається виразити через елементарні функції. Розроблено метод чисельного інтегрування табличної функції для однієї змінної з використанням многочлена Тейлора. Наведено конкретні приклади обчислення інтегралів – неозначеного і означеного.**

***Abstract* – Has been substantiated the need for numerical integration of table functions using polynomial Taylor. Found that many practical problems of the original integrand cannot always be expressed in terms of elementary functions. Has been designed the method of numerical integration of table functions to one variable using Taylor polynomial. Showed the specific examples of computing integrals – definite and indefinite.**

Ключові слова – чисельне інтегрування функцій; таблична функція; многочлен Тейлора; інтерполяційний многочлен.

Keywords – numerical integration of functions; table function; Taylor polynomial; polynomial interpolation.

I. Вступ

При вирішенні проблем програмної інженерії існує багато прикладних задач, у математичному формулюванні яких виникає потреба обчислення інтегралів – неозначених і означених, одинарних, подвійних і потрійних, криволінійних і за поверхнею та ін. Найважливіші з таких задач полягають в обчисленні: площі та довжини дуги плоскої фігури; об'єму тіла за відомими площами поперечних перерізів чи тіла обертання; площі поверхні будь-якого тіла чи тіла обертання; статичних моментів і моментів інерції плоских дуг і фігур; координат центра ваги; роботи і тиску [1]. В таких задачах деяка підінтегральна функція у процесі виконання інженерних розрахунків часто подається у вигляді таблиці. При цьому незалежні змінні, що відповідають за її площу, об'єм чи ін., визначаються з системи рівнянь, яка отримується шляхом прирівнювання до нуля частинних похідних функції мети за цими змінними.

Дуже часто потреба обчислення інтегралу табличної функції є проміжним етапом у процесі розв'язання тої чи іншої інженерної задачі. Так, нелінійна модель стану об'єкта (який описується системою нелінійних алгебричних рівнянь) може містити одну або декілька функцій, які задано в табличному вигляді. Наприклад, якщо елементом об'єкта є спресована деревина з характеристикою $P = \varphi[x]$ (x – величина деформації деревини; P – сила, що викликає цю деформацію), яку задано у вигляді таблиці від однієї змінної, то рівняння $P = \varphi[x] = 0$ буде одним з рівнянь нелінійної системи стану цього об'єкта. Застосування методу Ньютона для розв'язання цієї системи рівнянь вимагатиме обчислення такого інтегралу $\int f[x]dx$.

II. Постановки задач чисельного інтегрування табличних функцій

Нехай необхідно обчислити інтеграл

$$I = \int_a^b f[x]dx \tag{1}$$

З курсу вищої математики [1, ст. 261] відомо, що для функції $f[x]$, неперервної на відрізку $[a, b]$, інтеграл (1) існує та визначається за формулою Ньютона-Лейбніца

$$I = \int_a^b f[x]dx = F[x]\Big|_a^b = F[b] - F[a], \qquad (2)$$

де $F[x]$ – первісна для функції $f[x]$. Однак для більшості практичних задач первісну $F[x]$ не завжди вдається виразити через елементарні функції. В інженерних розрахунках функція $f[x]$ часто задається як аналітично, так і у вигляді таблиці її значень для певних значень аргументу. Все це породжує потребу в наближених методах обчислення інтеграла (1), які умовно поділяються на аналітичні та числові. *Аналітичні методи*, за своєю сутністю, полягають у точній чи наближеній побудові первісної $F[x]$ та подальшому використанні формули (2). *Числові методи* ж дають змогу безпосередньо знайти числове значення інтегралу, базуючись на відомих значеннях підінтегральної функції (а інколи і на її похідних) у заданих точках, які називають *вузлами*. Тут розглядатимемо тільки числові методи інтегрування табличних функцій. Сам процес числового визначення інтегралу називається *квадратурою*, а відповідні формули – *квадратурними формулами*.

Постановки задач чисельного інтегрування табличних функцій з однією, двома чи трьома незалежними змінними загалом формулюються в одному з таких двох варіантів.

Задача 1. Для табличної функції $Y = Y[\bar{X}]$ з однією, двома чи трьома змінними $\bar{X} = [x_i, i = \overline{1,3}]$ потрібно у довільній точці простору незалежних змінних, заданої координатами $\bar{X} = \bar{X}' \Rightarrow [x_i = x_i', i = \overline{1,3}]$, обчислити неозначені інтеграли $\int f[x_1]dx_1$, $\int f[x_1, x_2]dx_1x_2$ чи $\int f[x_1, x_2, x_3]dx_1x_2x_3$.

У загальному випадку функцію $Y = Y[\bar{X}]$ можна подати у вигляді табл. 1, під інтегралом якої потрібно розуміти аналітичний вираз її інтерполянти [3].

ТАБЛИЦЯ I. ЗАГАЛЬНИЙ ВИГЛЯД ТАБЛИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ДЛЯ БАГАТЬОХ НЕЗАЛЕЖНИХ ЗМІННИХ

№ вузла	0	1	…	i	…	p
$\bar{X}_1$	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	…	$x_{1,i}$	…	$x_{1,p}$
$\bar{X}_2$	$x_{2,0}$	$x_{2,1}$	…	$x_{2,i}$	…	$x_{2,p}$
$\bar{X}_3$	$x_{3,0}$	$x_{3,1}$	…	$x_{3,i}$	…	$x_{3,p}$
$\bar{Y}$	y_0	y_1	…	y_i	…	y_p

де: $\bar{\bar{X}} = [x_{k,i}, i = \overline{1,p}; k = \overline{1,m}]$, $\bar{Y} = [y_i, i = \overline{1,p}]$ – відомі числа; p – кількість вузлів інтерполянти; m=3 – кількість змінних.

Задача 2. Функція $Y = Y[\bar{X}]$ з незалежними змінними $\bar{X} = [x_i, i = \overline{1,3}]$ задана у вигляді табл. 1. Потрібно обчислити значення означених інтегралів $\int_O f[x_1]dx_1$, $\iint_D f[x_1, x_2]dx_1x_2$ чи $\iiint_T f[x_1, x_2, x_3]dx_1x_2x_3$ для заданих меж інтегрування.

Очевидно, постановка задачі 2 є окремим випадком задачі 1, однак її переважно розглядають як окрему задачу, оскільки в ній обчислення відповідних інтегралів вимагає застосування дещо складніших формул. Їх називають *формулами чисельного інтегрування*, а процедуру обчислення інтегралу за цими формулами називають *числовим інтегруванням табличної функції*.

Один з можливих способів розв'язання сформульованих задач базується на використанні різних квадратурних формул приблизно такого вигляду:

$$I \equiv \int_a^b f[x]dx \approx (b-a)\sum_{i=1}^{n} A_i f[x_i] \equiv I_n \qquad (3)$$

з відомим залишковим членом $R_n(f[x]) = I - I_n$ або його оцінкою. Загалом як вузлові точки x_i, так і вагові множники A_i завчасно є невідомими і підлягають визначенню при виведенні кожної конкретної квадратурної формули (3) на підставі вимог, пред'явлених до неї.

Практично, задача чисельного інтегрування табличних функцій є еквівалентною оцінюванню середнього значення функції, яке на відрізку $[a, b]$ визначається таким виразом:

$$f[x]_{cp} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f[x]dx. \qquad (4)$$

$$I = \int_a^b f[x]dx = (b-a)\cdot f[x]_{cp}. \qquad (5)$$

Водночас, визначення середнього значення функції – це статистична задача, яка містить у собі проблеми послідовної вибірки і планування експерименту. Через складність такої постановки задачі тут обмежимось тільки класичними методами чисельного інтегрування, що базуються на попередньому визначенні як вузлових точок, у яких має задаватися інформація про інтегровану функцію, так і самою цією інформацією.

Використовувані нижче в алгоритмах чисельного інтегрування табличних функцій квадратурні формули будуються, як вже було зазначено вище, на основі тих чи інших критеріїв, що визначають положення вузлових точок і величини вагових множників. Такими критеріями можуть бути: 1) подання інтегралу у вигляді інтегральної суми; 2) інтерполяція підінтегральної функції (наприклад, многочленом Тейлора [2]) і подальше інтегрування інтерполяційної функції; 3) вимога, щоби формула (3) була абсолютно точною для визначеного класу функцій, і т.д.

III. ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ТАБЛИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ОДНІЄЇ НЕЗАЛЕЖНОЇ ЗМІННОЇ

Розглянемо послідовність розв'язування задач 1 і 2 спочатку стосовно неперіодичної табличної функції для однієї незалежної змінної з використанням многочлена Тейлора, а потім, у інших публікаціях, з двома і трьома змінними.

ТАБЛИЦЯ II. ЗАГАЛЬНИЙ ВИГЛЯД ТАБЛИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ОДНІЄЇ НЕЗАЛЕЖНОЇ ЗМІННОЇ

№ вузла	0	1	…	*i*	…	*p*
$\bar{X}$	x_0	x_1	…	x_i	…	x_p
$\bar{Y}$	y_0	y_1	…	y_i	…	y_p

Загалом функцію $Y = Y[\bar{X}]$, яку задано табл. 2, можна подати аналітично її інтерполянтою у вигляді многочлена Тейлора n-го степеня [3]:

$$Y = c_0 + c_1\frac{x}{1!} + c_2\frac{x^2}{2!} + \ldots + c_p\frac{x^n}{n!} = \bar{T}[x] \times \bar{C}^{\text{т}}, \qquad (6)$$

де: $\bar{T}[x]$ – рядок Тейлора; $\bar{C}^{\text{т}}$ – транспонований рядок (стовпець) коефіцієнтів інтерполянти. Стовпець $\bar{C}^{\text{т}}$ є коренем такої лінійної системи рівнянь:

$$\begin{cases} c_0 & +c_1\frac{x_0}{1!} & +\ldots & +c_p\frac{x_0^n}{n!} & = y_0; \\ c_0 & +c_1\frac{x_1}{1!} & +\ldots & +c_p\frac{x_1^n}{n!} & = y_1; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots; \\ c_0 & +c_1\frac{x_p}{1!} & +\ldots & +c_p\frac{x_p^n}{n!} & = y_p; \end{cases} \Rightarrow \bar{\bar{T}}[\bar{X}] \times \bar{C}^{\text{т}} = \bar{Y}^{\text{т}}, \qquad (7)$$

де: $\bar{\bar{T}}[\bar{X}]$ – матриця Тейлора, яка обчислюється за координатами вузлів $\bar{X}$ інтерполяції; $\bar{Y}^{\text{т}}$ – транспонований рядок (стовпець) вузлів інтерполяції.

Неозначений одинарний інтеграл від многочлена (6), з урахуванням (7), визначається за такою формулою:

$$\int f[x]dx = c_0\frac{x}{1!} + c_1\frac{x^2}{2!} + \ldots + c_p\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \bar{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=x'} \times \bar{\bar{Ix}} \times \bar{C}^{\text{т}}, \qquad (8)$$

а ***означений одинарний інтеграл*** від многочлена (6) – за такою формулою:

$$\begin{aligned} \int_a^b f[x]dx &= c_0\frac{x}{1!} + c_1\frac{x^2}{2!} + \ldots + c_p\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Bigg|_{x=a}^{x=b} = \\ &= \bar{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=x'} \times \bar{\bar{Ix}} \times \bar{C}^{\text{т}}\Big|_{x=a}^{x=b} = \bar{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=a}^{x=b} \times \bar{\bar{Ix}} \times \bar{C}^{\text{т}} = \\ &= \left(\bar{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=b} - \bar{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=a}\right) \times \bar{\bar{Ix}} \times \bar{C}^{\text{т}}, \end{aligned} \qquad (9)$$

де: $\bar{T}^{\text{i}}[x]$ – інтегрований рядок Тейлора; $\bar{\bar{Ix}}$ – матриця інтегрування рядка Тейлора.

Отже, під час обчислення одинарних інтегралів від функції, заданої табл. 2, потрібно виконати такі дії:

- за даними таблиці сформувати матричне рівняння (7) та розв'язати його;
- сформувати інтегрований рядок Тейлора $\bar{T}^{\text{i}}[x]$ і матрицю його інтегрування $\bar{\bar{Ix}}$;
- для неозначеного інтегралу – підставити у формулу (8) отриманий корінь $\bar{C}^{\text{т}}$ рівняння (7) та числове значення x = x' і виконати операції множення матриць, вказані у виразі (8);
- для означеного інтегралу – підставити у формулу (9) корінь $\bar{C}^{\text{т}}$ рівняння (7) та числові значення x = a і x = b, а потім виконати операції множення матриць, вказані у виразі (9).

Приклад. Нехай від функції $Y = Y[\bar{X}]$, заданої табл. 3, потрібно обчислити значення неозначеного інтегралу при $x = x' = 1.1$ та означеного – при $x = a = 0.9$ і $x = b = 1.5$.

ТАБЛИЦЯ III. ЗНАЧЕННЯ ТАБЛИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

№ вузла	1	2	3	4
$\bar{X}$	0,90	1.00	1.25	1.50
$\bar{Y}$	893	686	430	304

Рівняння для цієї табличної функції має такий вигляд

$$Y = c_0 + c_1\frac{x}{1!} + c_2\frac{x^2}{2!} + c_3\frac{x^3}{3!} = \bar{T}[x] \times \bar{C}^{\text{т}}, \qquad (10)$$

а розв'язком матричного рівняння (7) є такий вектор:

$$\bar{\bar{T}}[\bar{X}]^{-1} \times \bar{Y}^{\text{т}} = \bar{C}^{\text{т}} = \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9099.29 \\ -18384.24 \\ 26437.14 \\ -19485.71 \end{vmatrix}. \qquad (10)$$

Значення *неозначеного одинарного інтегралу* від функції $Y = Y[x]$ при $x = x' = 1.1$ знаходимо за формулою (8):

$$\int f[x]dx = \bar{T}^{\text{i}}[x']\Big|_{x'=1.1} \times \bar{\bar{Ix}} \times \bar{C}^{\text{т}} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \frac{x'}{1!} & \frac{(x')^2}{2!} & \frac{(x')^3}{3!} & \frac{(x')^4}{4!} \end{vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1.1 & 0.605 & 0.2218 & 0.0610 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} 9099.29 \\ -18384.24 \\ 26437.14 \\ -19485.71 \end{vmatrix} = 3562.68. \qquad (11)$$

Значення *означеного одинарного інтегралу* від функції $Y = Y[x]$ при $x = a$ і $x = b$ знаходимо за формулою (9), внаслідок чого отримаємо такий розрахунковий вираз:

$$\int_a^b f[x]dx = \left(\overline{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=b} - \overline{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=a} \right) \times \overline{\overline{Ix}} \times \overline{C}^{\text{т}} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 1 & \frac{b}{1!} & \frac{b^2}{2!} & \frac{b^3}{3!} & \frac{b^4}{4!} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & \frac{a}{1!} & \frac{a^2}{2!} & \frac{a^3}{3!} & \frac{a^4}{4!} \end{vmatrix} \right) \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} \quad (12)$$

Інтегрований рядок Тейлора при $x = a = 0.9$ і $x = b = 1.5$ матиме такі значення елементів

$$\overline{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=1.5} - \overline{T}^{\text{i}}[x]\Big|_{x=0.9} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \frac{1.5}{1!} & \frac{1.5^2}{2!} & \frac{1.5^3}{3!} & \frac{1.5^4}{4!} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & \frac{0.9}{1!} & \frac{0.9^2}{2!} & \frac{0.9^3}{3!} & \frac{0.9^4}{4!} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0.6 & 0.720 & 0.4410 & 0.1836 \end{vmatrix},$$

а означений інтеграл – таке значення

$$\int_{0.9}^{1.5} f[x]dx = \begin{vmatrix} 0 & 0.6 & 0.720 & 0.4410 & 0.1836 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} 9099.29 \\ -18384.24 \\ 26437.14 \\ -19485.71 \end{vmatrix} = 304.12. \quad (13)$$

Висновки

Встановлено, що для більшості практичних задач обчислення інтегралів первісну від підінтегральної функції не завжди вдається виразити через елементарні функції. В інженерних розрахунках підінтегральна функція часто задається таблицею її значень для певних значень аргументу.

Розроблено метод чисельного інтегрування табличної функції для однієї змінної з використанням многочлена Тейлора. Для обчислення *неозначеного інтегралу* потрібно помножити інтегрований рядок Тейлора на матрицю інтегрування та на стовпець коефіцієнтів інтерполянти. Обчислення ж *означеного інтегралу* зводиться до множення виразу, який є різницею між інтегрованими рядками Тейлора в заданих межах, на матрицю інтегрування та на стовпець коефіцієнтів інтерполянти.

Література References

[1] Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Вычислительная математика в упражнениях и задачах : учеб. пособ. [для студ. ВТУЗов]. – Ч. I. – Изд. 3-е, [перераб. и доп.]. – М. : Высш. шк., 1980. – 320 с.

[2] Фильц Р.В., Коцюба М.В., Грицюк Ю.И. Алгоритм вычисления на ЭВМ многочлена Тейлора и его производных // Электромеханика : Изв. вузов. – 1991. – № 5. – С. 5-10.

[3] Фільц Р.В. Наближення таблично заданих функцій (інтерполяція та апроксимація). Конспект лекцій з предмету "Математичні задачі електромеханіки" для студ. спец. 1801 "Електромеханіка". – Львів : Вид-во ДУ ЛП, 1995. – 59 с.