Комп’ютерне моделювання кореляційної функції бета-розподілу для випадкових структур

А.Є. Давидок
відділ математичного моделювання нерівноважних процесів
Центр математичного моделювання
Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України
Львів, Україна
davydoka@gmail.com

Simulation of correlation function of beta-distribution for random structures

A. Davydok
Department of mathematical modeling nonequilibrium processes
Centre of Mathematical Modeling of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Ukrainian Academy of Sciences Lviv, Ukraine
davydoka@gmail.com

***Анотація*—Одержано формулу кореляційної функції бета-розподілу в загальному випадку для випадково неоднорідних структур. Проведено комп’ютерне моделювання та визначений вплив параметрів розподілу на функцію кореляції та дисперсії, зокрема, для тіл з неоднорідностями зосередженими біля однієї з поверхонь або посередині тіла.**

***Abstract*—The formula of correlation function of beta-distribution in the general case for random nonhomogeneous structures was obtained. Computer simulation was carried out and the influence of distribution parameters on the correlation function and dispersion was established, in particular for bodies with nonhomogeneities concentrated near one of the surfaces or in the middle of the body.**

Ключові слова—бета-розподіл; функція кореляції; дисперсія; комп’ютерне моделювання; випадково неоднорідна структура

Keywords—beta-distribution; correlation funtion; dispersion; simulation; random nonhomogeneous structure

У випадках, коли невідомою є точна геометрична конфігурація багатофазних тіл, виникає необхідність розгляду параметрів середовища як стохастичних величин, що призводить до випадкового характеру досліджуваних фізичних полів. Тоді, щоб встановити основні особливості досліджуваного явища, як правило, застосовують метод стохастичного усереднення. Внаслідок згладжування окремих реалізацій отримані статистичні характеристики можуть суттєво різнитись від реалізації структури середовища, при цьому повна статистика містить всю інформацію про динамічну систему. Як правило, на практиці знаходять тільки перші статистичні характеристики, які пов’язані з одноточковими розподілами ймовірностей. У праці [1] запропоновано підхід до математичного опису дисперсії та функції кореляції (автокореляції) поля концентрації у випадково неоднорідних шаруватих структурах із заданим розподілом фаз. При отриманні відповідних формул використано подання випадкового поля у вигляді ряду Неймана [1, 2], що дало можливість визначити другі моменти поля через функцію кореляції фаз.

Випадкові структури можуть мати різний характер розташування неоднорідностей. На рис. 1 показано приклади одновимірних за просторовою координатою неоднорідних структур (внаслідок симетрії за двома іншими координатами), у яких розташування включень можна описати ймовірнісним бета-розподілом.

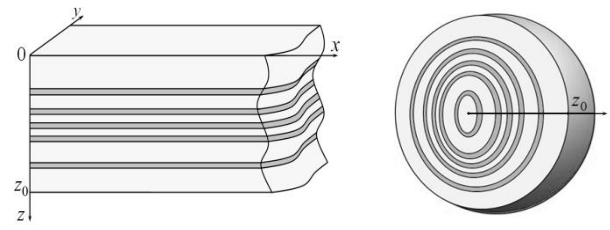

Рис. 1. Приклади випадкових структур, що описуються бета-розподілом

Проблема знаходження функції кореляції фаз у багатофазних випадково неоднорідних структурах також виникла при дослідженні парного взаємовпливу шаруватих включень на усереднений дифузійний потік [3]. Зокрема, для випадку структури з областю ймовірного розташування включень біля верхньої границі тіла, що описується частковим випадком бета-розподілу включень, відповідна функція кореляції фаз у літературі відсутня. Тому в даній роботі отримано кореляційну функцію бета-розподілу та досліджено закономірності її поведінки.

Функція густини β-розподілу в загальному випадку має вигляд [4]

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left(\dfrac{x}{z_0}\right)^{\alpha-1}\left(1-\dfrac{x}{z_0}\right)^{\beta-1}, & x\in[0;z_0]\,;\\ 0, & x\notin[0;z_0]\,,\end{cases}\qquad(1)$$

де $\Gamma(t)$ – гама-функція, α, β – ступені вільності.

Кореляційна функція. Для бета-розподілу випадкових величин на відрізку $[0;z_0]$ (рис. 1) двоточкова функція кореляції фаз визначається через функцію двовимірного спільного розподілу випадкових величи $w_2(x,y)$ [4] наступним чином [5-7]

$$\psi(x,y)=\iint\limits_{(V)^2} z_i z_j w_2(x,y)dz_i dz_j\,,\qquad x,y\in[0;z_0],\qquad(2)$$

де $\psi(x,y)$ – функція кореляції, V – об'єм усього тіла, z_i, z_j – просторові координати.

Функція густини імовірнісного двовимірного β-розподілу Джоунса має вигляд [8]:

$$w_2(x,y)=\frac{\Gamma(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\beta_3)}\left(\frac{x}{z_0}\right)^{\beta_1-1}\left(\frac{y}{z_0}\right)^{\beta_2-1}\left(1-\frac{x}{z_0}\right)^{\beta_2+\beta_3-1}\times$$
$$\times\left(1-\frac{y}{z_0}\right)^{\beta_1+\beta_3-1}\left(1-\frac{xy}{z_0^2}\right)^{-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)},\qquad(3)$$

де $\Gamma(x)$ – гама-функція, β_1, β_2, $\beta_3>0$ – ступені вільності ймовірнісного розподілу, $0\le x,y\le z_0$.

Проведено комп'ютерне моделювання та встановлено залежність функції кореляції від параметрів розподілу. Встановлено, що зміна ступенів вільності впливає як на величину, так і на поведінку функції кореляції (рис. 2).

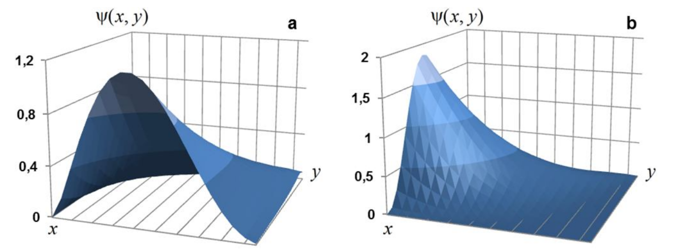

Рис. 2. Функція кореляції $\psi(x,y)$ для значень $\beta_1=1$, $\beta_2=\beta_3=2{,}5$ (a) та $\beta_1=\beta_3=3{,}5$, $\beta_2=1$ (b)

Розглянуто також наступні часткові випадки бета-розподілу за Джоунсом (3):

I. При $\beta_1=\beta_2=1$, $\beta_3\equiv\beta>1$ функція густини (3) описує випадково неоднорідну структуру із областю найбільш ймовірного розташування неоднорідностей біля границі тіла (в околі точки) $z=0$. Такій структурі відповідає також частковий випадок розподілу (1) при $\alpha=1$, $\beta>1$ (розподіл $f_1(x)$). Функція кореляції (2) у цьому випадку є такою

$$\psi_1(x,y)=A\beta(\beta+1)\left(1-\frac{x}{z_0}\right)^{\beta}\left(1-\frac{y}{z_0}\right)^{\beta}\left(1-\frac{xy}{z_0^2}\right)^{-(\beta+2)},$$

де $A=\iint\limits_{(V)^2} z_i z_j dz_i dz_j$.

На рис. 3 наведено 3D і 2D графіки $\psi_1(x,y)$ для ступеня вільності β=2,5 (рис. 3). Тут і далі z_0=1.

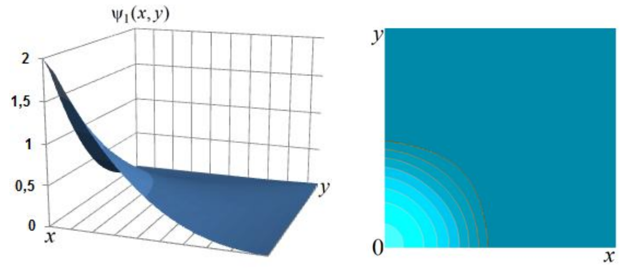

Рис. 3. Функція кореляції $\psi_1(x,y)$

Показано, що збільшення ступеня вільності β імовірнісного розподілу призводить до зростання функції кореляції $\psi_1(x,y)$, найбільше біля точки (0;0).

II. При $\beta_1=\beta_2\equiv\beta>1$, $\beta_3=1$ функції густини двовимірного спільного бета-розподілу (3) відповідає стохастично неоднорідній структурі із областю найбільш ймовірного розташування включень біля поверхні тіла (в околі точки) $z=z_0$. Одновимірний бета-розподіл (1) відповідає такій структурі при $\alpha>1$, $\beta=1$ (розподіл $f_2(x)$). Функція кореляції є наступною

$$\psi_2(x,y)=A\frac{2\beta\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}\left(\frac{xy}{z_0^2}\right)^{\beta-1}\left(1-\frac{x+y}{z_0}+\frac{xy}{z_0^2}\right)^{\beta}\left(1-\frac{xy}{z_0^2}\right)^{-(2\beta+1)}.$$

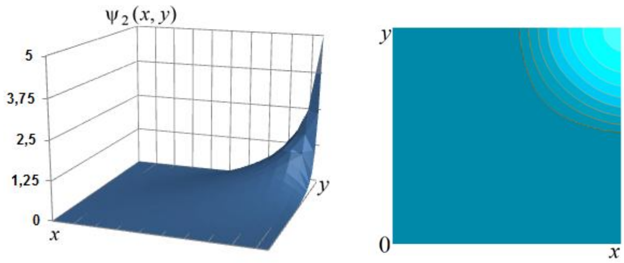

Рис. 4. Функція кореляції $\psi_2(x,y)$

Функцію кореляції $\psi_2(x,y)$ для ступеня вільності β =2,5 проілюстровано на рис. 4. У цьому випадку збільшення ступеня вільності β призводить до зростання функції $\psi_2(x,y)$, найбільше в околі точки (z_0 ; z_0).

III. При $\beta_1=\beta_2=\beta_3\equiv\beta>2{,}5$ функція бета-розподілу (3) відповідає структурі із включеннями, сконцентрованими посередині інтервалу $[0;z_0]$. Цій структурі відповідає частковий випадок розподілу (1) при $\alpha=\beta>1$ (розподіл $f_3(x)$), а функція кореляції задається виразом

$$\psi_3(x,y)=A\frac{\Gamma(3\beta)}{\Gamma^3(\beta)}\left(\frac{xy}{z_0^2}\right)^{\beta-1}\left(1-\frac{x+y}{z_0}+\frac{xy}{z_0^2}\right)^{2\beta-1}\left(1-\frac{xy}{z_0^2}\right)^{-3\beta}.$$

Рис. 5 ілюструє функцію кореляції $\psi_3(x,y)$ при значенні ступеня вільності β=3.

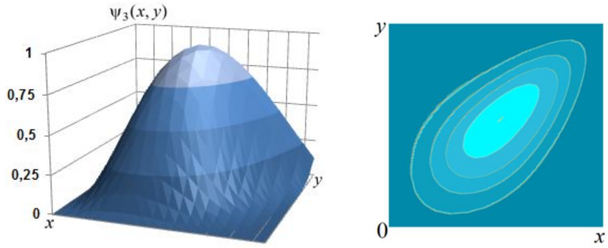

Рис. 5. Функція кореляції $\psi_3(x,y)$

Встановлено, що для цього випадку збільшення ступеня вільності також викликає зростання кореляційної функції, при цьому чим більших значень набуває параметр β, тим більше функція $\psi_3(x,y)$ наближається до симетричного вигляду.

Дисперсія. З означення випливає, що дисперсія випадкової величини σ^2 є одноточковою функцією кореляції. Тоді для бета-розподілу маємо

$$\sigma^2(x)=\psi(x,x)=A\frac{\Gamma(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\beta_3)}\left(\frac{x}{z_0}\right)^{\beta_1+\beta_2-1}\times$$

$$\times\left(1-\frac{x}{z_0}\right)^{\beta_1+\beta_2+2\beta_3-2}\left(1-\frac{x^2}{z_0^2}\right)^{-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}.$$

На рис. 6-8 подано розподіли густини одновимірного бета-розподілу (рис. a) та дисперсії (рис. b) для структури

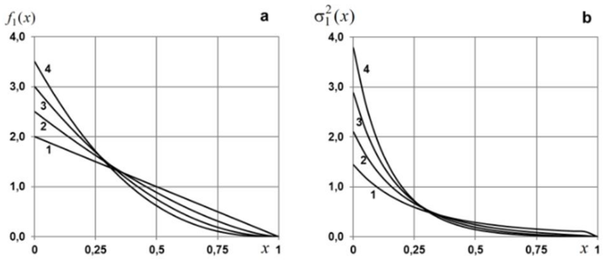

Рис. 6. Густина розподілу $f_1(x)$ (a) та дисперсія $\sigma_1^2(x)$ (b)

із включеннями зосередженими біля верхньої границі тіла (рис. 6), біля нижньої поверхні (рис. 7) та посередині тіла (рис.8). Криві 1-4 побудовані для значень відповідного ступеня вільності 2; 2,5; 3; 3,5.

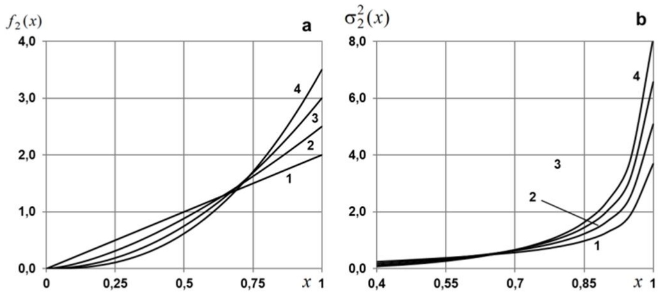

Рис. 7. Густина розподілу $f_2(x)$ (a) та дисперсія $\sigma_2^2(x)$ (b)

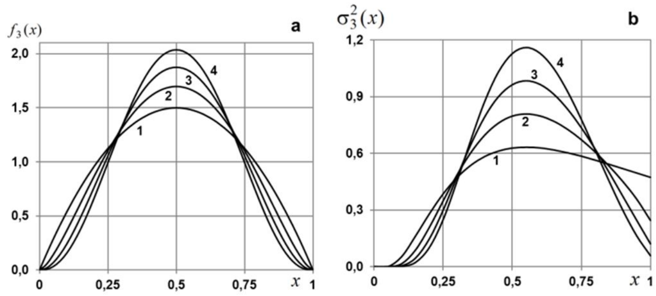

Рис. 8. Густина розподілу $f_3(x)$ (a) та дисперсія $\sigma_3^2(x)$ (b)

Встановлено, що як і для функції кореляції, збільшення ступеня вільності розподілу призводить до збільшення дисперсії біля відповідної границі, де сконцентровані неоднорідності, або в центрі відрізка $[0;z_0]$ для структури із включеннями розташованими посередині тіла.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

[1] Ю. Білущак, Є. Чапля, О. Чернуха, Двоточкова функція кореляції та дисперсія випадкового дифузійного поля концентрації в смузі з рівномірним розподілом шаруватих включень, Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2012, Вип. 16, С. 7-22.

[2] О.Ю. Чернуха, В.Є. Гончарук, А.Є. Давидок, Математичне моделювання процесів термодифузії розпадної речовини у стохастично неоднорідній шаруватій смузі, Математичні методи і фізико-механічні поля, 2014, Т. 57, № 3, С. 143-154.

[3] Y. Chaplya, O. Chernukha, A. Davydok, Simulation of diffusion flows in two-phase multilayered stochastically nonhomogeneous bodies with non-uniform distribution of inclusions, Task Quarterly, 2015, Vol. 19, No. 3, pp. 321-351.

[4] В. Королюк, Н. Портенко, А. Скороход, А. Турбин, Справочник по теории вероятности и математической статистике, М.: Наука, 1985.

[5] С. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, Ч. I. Случайные процессы, М.: Наука, 1976.

[6] С. Рытов, Ю. Кравцов, В. Татарский, Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля, М.: Наука, 1978.

[7] А. Малахов, Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразования, М.: Советское радио, 1978.

[8] R. Jacobs, A. Bekker, S. Human, Bivariate Beta Distributions and Beyond, Int. Statistical Inst.: Proc. 58th World Statistical Congress (Session CPS009), Dublin, 2011, pp. 3984-3990.