

# Моделювання та дослідження термопружного стану термочутливого порожнистого циліндра за тепловідведення випаровуванням рідини

І. Ракоча

Національний університет «Львівська політехніка»  
Львів, Україна  
iryana.i.rakocha@lpnu.ua

В. Попович

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України  
Львів, Україна  
dept19@iapmm.lviv.ua

## Modeling and investigation of thermostressed state of thermosensitive hollow cylinder during heat removal by the way of evaporation of liquid

Iryna Rakocha

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine  
iryana.i.rakocha@lpnu.ua

Vasyl Popovych

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics  
and Mathematics of National Academy of Science of  
Ukraine, Lviv, Ukraine  
dept19@iapmm.lviv.ua

**Анотація**—Сформульовано математичну модель та проілюстровано методику визначення усталеного теплового та напружено-деформованого станів тришарового термочутливого порожнистого циліндра, на одній з обмежувальних поверхонь якого відбувається конвективно-променевий теплообмін, а через іншу – тепловідведення шляхом випаровування рідини. При цьому прийнято, що у другому шарі циліндра наявні розподілені за параболічним законом джерела тепла, а між шарами виконуються умови ідеального теплового контакту. Досліджено вплив залежності термомеханічних характеристик матеріалів шарів від температури та інтенсивності випаровування на характер і рівень розподілу температури і напружень.

**Abstract**—On the example of the three-layered by axial coordinate cylinder the formulation of the mathematical model and the method of determination of steady-state distributions of temperature and stresses are illustrated. The heat flux is directed to one of the flat bounding surfaces, and the heat removal by liquid evaporation takes place on the another surface. It is assumed that in the second layer of cylinder there are heat sources distributed by parabolic law, and between layers the conditions of ideal thermal contact are performed. The effect of thermomechanical properties of materials of the cylinder

components depending on the temperature and evaporation intensity on the nature and level of temperature and stress distributions are investigated. It is shown, that neglecting the dependence of thermomechanical characteristics (the replacement for basic or average integral ones) causes the significant differences between the distributions of stress-strain state components in the thermosensitive and nonthermosensitive cylinders, which may lead to qualitatively different distributions (the compression in the thermosensitive and stretching in nonthermosensitive one).

**Ключові слова**—багатoshаровий циліндр, термочутливі матеріали, температура, напружено-деформований стан, тепловідведення, випаровування рідини

**Keywords**—multilayer cylinder, thermosensitive materials, temperature, stress-strain state, heat removal, evaporation of liquid

### I. ВСТУП

Дослідження термопружного стану багатoshарових структур відіграє важливу роль в багатьох галузях техніки, зокрема, в елементах мікроелектроніки [8] при їх проектуванні та експлуатації. В них протікає електричний струм, результатом дії якого є неоднорідне виділення теп-

ла і значний рівень градієнтності температури. Надійність роботи таких елементів гарантує дотримання належного теплового стану, який можна спроектувати, виходячи з моделі термочутливого тіла, що передбачає врахування залежності теплових та механічних характеристик матеріалів шарів від температури.

У випадку, якщо температура багат шарового елемента перевищує критичну, необхідно швидко і ефективно її стабілізувати. Це можна здійснити за допомогою процесів тепловідведення кипінням чи випаровуванням рідин з обмежувальних поверхонь. Коли температура поверхні, через яку відводиться тепло не є такою, щоб забезпечити на ній кипіння рідини [2], або товщина плівки є доволі мала, то тепло передається через плівку рідини та відводиться з її поверхні в результаті випаровування [3].

Огляд досліджень термом'якого стану термочутливих тіл детально подано в роботі [9]. У працях [1, 4-7, 9] вказано на важливість врахування термочутливості матеріалів шарів при визначенні розподілів температури та напружень багат шарових конструкцій. Процес тепловідведення шляхом випаровування рідини з обмежувальних поверхонь описано в [3].

Тут ілюструємо моделювання та методику визначення і дослідження термом'якого стану термочутливих шаруватих тіл за тепловідведення шляхом випаровування рідини через обмежувальну поверхню.

## II. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглядається тришаровий безмежний термочутливий порожнистий циліндр, який складається із трьох циліндрів, виготовлених із різних матеріалів. Циліндр нагрівається наявним у першому та третьому шарах джерелами тепла. Через внутрішню обмежувальну поверхню  $r=r_1$  відбувається конвективно-променевиий теплообмін із середовищем, температура якого  $t=t_{c1}$ , а на зовнішній  $r=r_4$  – тепловідведення шляхом випаровування рідини. Коефіцієнти теплообмінів через ці поверхні сталі і рівні  $\alpha_1$  та  $\alpha_3$  відповідно. На межах дотику сусідніх шарів  $r=\{r_2, r_3\}$  виконуються умови ідеального теплового контакту. Циліндричні поверхні кожної із складових є теплоізолюваними, а отже потік тепла через них відсутній.

За таких умов ставиться завдання визначити розподіли температури і компонент напружено-деформованого стану у циліндрі.

## III. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРИ

Математична модель для визначення температури містить

- рівняння теплопровідності складових

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{dt_i}{dr} \right) = W^{(i)}(r) (\delta_{i1} + \delta_{i3}), r_i < r < r_{i+1}, i = \overline{1, 3};$$

- крайові умови на обмежувальних поверхнях

$$\left[ \lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{dt_1}{dr} - \alpha(t_1 - t_{c1}) - \sigma \varepsilon (t_1^4 - t_{c1}^4) \right]_{r=r_1} = 0,$$

$$\left[ \lambda_t^{(3)}(t_3) \frac{dt_3}{dr} + \alpha(t_3 - t_{cn}) + m_{\text{evap}} \left( \frac{P_{A,\text{sat}}}{t_3} - \frac{P_{A,c}}{t_{cn}} \right) \right]_{r=r_4} = 0;$$

- умови ідеального теплового контакту складових циліндра

$$t_i \Big|_{r=r_{i+1}} = t_{i+1} \Big|_{r=r_{i+1}}, i = 1, 2,$$

$$\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{dt_i}{dr} \Big|_{r=r_{i+1}} = \lambda_t^{(i+1)}(t_{i+1}) \frac{dt_{i+1}}{dr} \Big|_{r=r_{i+1}}, i = 1, 2,$$

де  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера.

Метод побудови розв'язку [7] нелінійної задачі теплопровідності включає такі кроки:

- 1) обезрозмірення математичної моделі;
- 2) апроксимація експериментально заданих залежностей коефіцієнтів теплопровідності від температури;
- 3) здійснення перетворення Кірхгофа;
- 4) розв'язання отриманої задачі на змінні Кірхгофа;
- 5) здійснення оберненого перетворення Кірхгофа.

Зазначимо, що температурні залежності коефіцієнтів теплопровідності складових від температури подані у вигляді

$$\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t_0}^{(i)}(t_i) \lambda_{t_0}^{(i)}(T_i) = \lambda_{t_0}^{(i)} \left( 1 + k_i (T_i - T_p) \right),$$

де  $k_i$  – задані сталі, а  $\lambda_{t_0}^{(i)} = \lambda_{t_0}^{(i)}(t_p)$  – опорні значення коефіцієнтів теплопровідності.

## IV. ВИЗНАЧЕННЯ КОМПОНЕНТ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

Визначення компонент напружено-деформованого стану здійснено за методикою [7]. Отримані формули для обчислення напружено-деформованого стану справедливі тільки для тонких складових, тобто таких, для яких при обчисленні присутніх в інтегральних рівняннях інтегралів з задовільною для нас точністю справедлива формула трапеції

$$\int_{\rho_i}^{\rho} Y(\eta) d\eta = \frac{\rho - \rho_i}{2} (Y(\rho) + Y(\rho_i)).$$

Якщо ж циліндр містить тонкі і товсті складові, то кожному із товстих шарів ставимо у відповідність певну кількість тонких з одного і того ж матеріалу. Перевірку достатності розбиття товстих шарів на тонкі складові забезпечує виконання інтегральної умови

$$\rho_1^2 p_1 - \rho_{n+1}^2 p_2 = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \sigma^{(k)}(\eta) d\eta,$$

де  $\rho=r/l_0$ ,  $l_0$  – деякий характерний розмір,  $p_1, p_2$  – задані сталі тиски на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра,  $\sigma^{(i)} = \sigma_r^{(i)} + \sigma_\varphi^{(i)}$  – сумарні напруження,  $n$  – кількість тонких шарів, які моделюють тришаровий циліндр.

#### ВИСНОВКИ

Отже, сформульовано нелінійну математичну модель для визначення температурного поля в тришаровому термочутливому порожнистому циліндрі за складного теплообміну. Побудовано розв'язок нелінійної задачі теплопровідності та визначено компоненти напружено-деформованого стану. Досліджено вплив термочутливості матеріалів шарів та інтенсивності випаровування рідини на характер і рівень розподілів температури, напружень, деформацій та переміщень.

Встановлено, що врахування термочутливості матеріалів шарів є вкрай важливим при визначенні розподілів компонент напружено-деформованого стану, оскільки нехтування термочутливістю може привести до великих кількісних і якісних (стиск в термочутливому і розтяг у нетермочутливому циліндрах, чи навпаки) розбіжностей.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] A. A. Yevtushenko, M. M. Kuciej, E. Och, Influence of thermal sensitivity of the pad and disk materials on the temperature during braking // Intern. comm. in heat and mass transfer – 2014. – 55 – P.84-92.
- [2] A. T. Komov, A physical model for prediction of critical heat fluxes in boiling in swirling subcooled flow under nonuniform heating // High Temp. – 2000. – 38, No. 3. – P. 502–506.
- [3] H. Honda, Theoretical study of evaporation heat transfer in horizontal microfin tubes: stratified flow model // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2001. – 47. – P. 3971-3983.
- [4] H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, Conduction of heat in solids, Oxford: Clarendon Press. – 1959.
- [5] N. Noda, Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // In: Thermal Stresses I / R. B. Hetnarski (ed.). – Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1986. – P. 391–483.
- [6] R. M. Kushnir, V. S. Popovych, Heat conduction problems of thermosensitive solids under complex heat exchange // In: Heat conduction – Basic research / V. S. Vikhrenko (ed.). – Rijeka: InTech (Croatia), 2011. – 350 p. – (Chap. 6. – P. 131–154.)
- [7] В. С. Попович, Б. М. Калиняк. Математичне моделювання та методика визначення статичного термопружного стану багатошарових термочутливих циліндрів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2014. — 57, №2. — С. 169-186.
- [8] Д. В. Федасюк, Методи та засоби теплового проектування мікроелектронних пристроїв. – Львів: Вид-во держ. ун-ту «Львів. політехніка», 1999. – 228 с.
- [9] Р. М. Кушнір, В. С. Попович, Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.