Про розв'язність задачі з функціональними крайовими умовами для квазідиференціального рівняння з мірами в коефіцієнтах

В.В. Мазуренко
кафедра диференціальних рівнянь і прикладної математики
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Івано-Франківськ, Україна
viktor.mazurenko@pu.if.ua

On the solvability of a functional boundary-value problem for a quasidifferential equation with measures as coefficients

V. Mazurenko
Department of Differential Equations
and Applied Mathematics
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
Ivano-Frankivsk, Ukraine
viktor.mazurenko@pu.if.ua

***Анотація*—На основі поняття псевдооберненої за Муром-Пенроузом матриці встановлено необхідні і достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі з функціональними крайовими умовами для квазідиференціального рівняння з мірами в коефіцієнтах. Отримано зображення розв'язку в інтегральній формі з допомогою функції Ґріна.**

***Abstract*—We consider a functional boundary-value problem for a quasidifferential equation in general case with the number of boundary conditions not coinciding with the order of the equation. We obtain necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution of such boundary-value problem using a method of pseudo-inverse by Moore-Penrose matrices. We represent the solutions in the integral form by the Green matrix.**

***Ключові слова*—квазідиференціальне рівняння з мірами; функціональна крайова задача; існування розв'язків; псевдообернена за Муром-Пенроузом матриця; матриця Ґріна.**

***Keywords*—quasidifferential equation with measures; functional boundary-value problem; existence of solutions; Moore-Penrose pseudo-inverse matrix; Green matrix.**

I. Вступ

Дослідження різноманітних фізичних процесів (як, н-д, поздовжні коливання стрижнів з кусково-змінним перерізом, крутильні коливання валів змінної жорсткості, температурні задачі з кусково-змінним коефіцієнтом теплопровідності та ін.), котрі враховують природну єдність дискретного (зосереджені величини) і неперервного (розподілені величини) приводить до необхідності створення адекватних математичних моделей. Багато з них описуються диференціальними рівняннями, що містять доданки вигляду $\left(a(x)y^{(m)}\right)^{(n)}$. За умови недостатньої гладкості коефіцієнта $a(x)$ такі рівняння не вдається звести (з допомогою операції n-кратного диференціювання) до звичайних диференціальних. Відтак в науковій літературі їх прийнято називати квазідиференціальними (КДР).

У доповіді розглядаються питання розв'язності задачі з функціональними крайовими умовами для КДР порядку $q = m + n$:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\right)^{(m-j)} = f(x)\,, \qquad (1)$$

$$l_k y(\cdot) = \eta_k\,,\ k = \overline{1,p}\,; \qquad (2)$$

тут l_k – лінійні функціонали на просторі $BV^{+}[a,b]$ неперервних справа функцій обмеженої на відрізку $[a,b]$ варіації, а коефіцієнти КДР (1) справджують умови: a_{00}^{-1} – обмежена і вимірна на $[a,b]$ функція; a_{i0}, a_{0j} – сумовні з квадратом на $[a,b]$ функції $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m})$; a_{ij} і f – міри на $[a,b]$, тобто $a_{ij} = b'_{ij}$ $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m})$ і $f = g'$, де $b_{ij}, g \in BV^{+}[a,b]$, так що диференціювання і рівність в (1) розуміються в узагальненому сенсі.

У випадку, коли функції $a_{ij}(x)$ і $g(x)$ є гладкими або абсолютно неперервними на відрізку $[a,b]$, задача (1), (2) та її частинні випадки такі, як задача Коші, двоточкова крайова задача, задача Коші-Ніколетті, задача Валле-Пуссена, багатоточкова задача, задача з s-точковими умовами інтегрального типу, задача з умовами спряження, в різних аспектах вивчаються багатьма авторами впродовж уже більше ста років. Для квазідиференціальних рівнянь з мірами в коефіцієнтах достатньо вивченими є лише початкові і крайові задачі [1]. Що стосується задачі (1), (2), то близькі за постановкою задачі вичались в [2, 3].

Існуванні і єдиність розв'язку

При дослідженні умов розв'язності задачі (1), (2) визначальною є ($p\times q$)-матриця $M = \left(l_k K_t^{\{v-1\}}(\cdot,a)\right)_{k=\overline{1,p}}^{v=\overline{1,q}}$, де $K(x,t)$ – аналог функції Коші КДР (1), що за змінною x є розв'язком КДР (1) з початковими умовами $K_x^{[v]}(t,t) = 0$ $(v = \overline{0,q-2})$, $K_x^{[q-1]}(t,t) = 1$, а вираз $K_{xt}^{[i]\{j\}}(x,t)$ означає мішану квазіпохідну ($i+j$)-го порядку [1, §13]. Нехай $M^{+} = \left(m_{ij}^{+}\right)_{i=\overline{1,q}}^{j=\overline{1,p}}$ – псевдообернена за Муром-Пенроузом ($q\times p$)-матриця, така що $MM^{+}M = M$ [2]. Тоді матриці $P_M = E_q - M^{+}M$ і $P_{M^*} = E_p - MM^{+}$ є матрицями ортогонального проектування $\left(P_M^2 = P_M = P_M^*, P_{M^*}^2 = P_{M^*} = P_{M^*}^*\right)$ просторів $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^m$ відповідно на нуль-простори $\ker M = \left\{u \in \mathbb{R}^n : Mu = 0\right\}$ і $\ker M^* = \left\{v \in \mathbb{R}^m : M^* v = 0\right\}$.

Теорема. *Нехай* $\operatorname{rank} M = r \le \min\{m,n\}$. *Тоді крайова задача* (1), (2) *має у просторі* $AC[a,b]$ ($q-r$)-*параметричну сім'ю розв'язків вигляду*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{q-r}\varphi_i(x)c_i + \sum_{k=1}^{p}\sum_{v=0}^{q-1}K^{\{v\}}(x,a)m_{q-v,k}^{+}\left(\eta_k - l_k y_g(\cdot)\right) + y_g(x) \qquad (3)$$

де $\varphi_1(x),\dots,\varphi_{q-r}(x)$ – *повна система* $q-r$ *лінійно незалежних розв'язків однорідної* ($g = 0, \eta_k = 0$) крайової задачі, а $y_g(x) = \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{2}\int_a^b K(x,t)dg(t)$ – *частинний розв'язок КДР* (1) *якщо і тільки якщо* $g \in BV^{+}[a,b]$ і $\eta_k \in \mathbb{R}$ $(k = \overline{1,p})$ *задовольняють умову, що містить* $(p-r)$ *співвідношень*:

$$P_{M^*}\left(\eta_1 - l_1 y_f(\cdot), \eta_2 - l_2 y_f(\cdot), \dots, \eta_p - l_p y_f(\cdot)\right) = 0 \qquad (4)$$

Для єдності розв'язку цієї задачі необхідно і достатньо виконання додаткової умови

$$P_M = 0\,. \qquad (5)$$

В якості наслідків з цієї теореми розглядаються три "крайні" випадки, коли $\operatorname{rank} M = q < p$, $\operatorname{rank} M = p < q$ і $\operatorname{rank} M = p = q$. Зокрема в останньому з них крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок $y \in AC[a,b]$ тоді і тільки тоді, коли $\det M \ne 0$. При цьому розв'язок зображається в інтегральному вигляді $y(x) = \int_a^b G(x,t)dg(t)$, де функція Ґріна

$$G(x,t) = \frac{(-1)^q}{\det M}\begin{vmatrix} K(x,a) & \dots & K^{\{q-1\}}(x,a) & \Phi(x,t) \\ l_1 K(x,a) & \dots & l_1 K^{\{q-1\}}(x,a) & l_1\Phi(x,t) \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ l_q K(x,a) & \dots & l_q K^{\{q-1\}}(x,a) & l_q\Phi(x,t) \end{vmatrix},$$

$$\Phi(x,t) = \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{2}K(x,t)\,.$$

Висновки

Постановка крайової задачі у вигляді (1), (2) дозволяє охопити значну кількість випадків – від початкових і крайових задач для лінійних звичайних диференціальних рівнянь до задач з багатоточковими умовами інтегрального типу для лінійних квазідиференціальних рівнянь з неперервними коефіцієнтами та коефіцієнтами імпульсного типу. Умова (4) теореми разом з умовою (5) цієї теореми дають відповідь на питання, чи існує розв'язок крайової задачі (1), (2), і в разі його існування – чи є він єдиним. На основі відомих алгоритмів обчислення псевдооберненої матриці формула (3) дозволяє конструктивно будувати розв'язок цієї задачі, а функція Ґріна дозволяє зобразити розв'язок в інтегральному вигляді.

Відзначимо також, що у критичному випадку $\left(P_{M^*} \ne 0\right)$ коли крайова задача (1), (2) нерозв'язна, для подальшого її дослідження важливо отримати критерій розв'язності збуреної задачі.

Література References

[1] Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Мазуренко В.В., Власій О.О. *Узагальнені квазідиференціальні рівняння*. Дрогобич: Коло, 2011.

[2] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. *Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary–Value Problems*. VSP, Utrecht, Boston, 2004.

[3] Тацій Р.М., Мазуренко В.В. "Условия разрешимости многоточечной задачи для обобщенной дифференциальной системы," *Доклады НАН Беларуси*, т. 55, № 3, сс. 12-16.