

Про Один Субградієнтний Алгоритм Вирішення Завдань Стохастичного Програмування з Обмеженням

Фахріддін Мірзоахмедов
кафедра математичного та інформаційного моделювання
Державний університет фінансів та економіки Таджикистану
Душанбе, Таджикистан
mirfakh@mail.ru

On a Subgradient Algorithm for Solving Stochastic Programming Problems with Constraint

Fakhriddin Mirzoahmedov
Department of Mathematical and Information Modeling
State University of Finance and Economics of Tajikistan
Dushanbe, Tajikistan
mirfakh@mail.ru

Анотація—В статті проаналізовано субградієнтний алгоритм вирішення задач стохастичного програмування з обмеженням. Доказується сходимість алгоритму по Чезаро з вірогідністю 1.

Abstract—The article deals with the subgradient algorithm for solving the problem of stochastic programming with restriction. The convergence of the Cesaro algorithm with probability 1 is proved.

Ключові слова— субградієнт, алгоритм, рішення задачі стохастичного програмування, обмеження, збіжність по Чезаро, ймовірність.

Keywords— subgradient, algorithm, solutions to the problem of stochastic programming, constraint, Cesaro convergence, probability.

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо наступну задачу стохастичного програмування [1]:

$$F(x) = Mf(x, \omega) = \int_{\omega \in \Omega} f(x, \omega) d\varphi(\omega) \xrightarrow{x \in X \subset R^n} \min \quad (1)$$

де X - опукле компактне підмножина R^n ,

$f(x, \omega)$ – вимірювана при кожному ω функція і опукла по x ;

ω – елементарна подія імовірнісного простору $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$,

де Ω – множина елементарних подій;

\mathfrak{F} – σ алгебра вимірних множин Ω ;

P - множина з певною Ω в мовірнісна міра, тобто $P(\Omega) = 1$.

II. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Основні труднощі, що виникають при вирішенні задачі (1) полягають в наступному: цільова функція - опукла але яку неможливо диференціювати, точне обчислення її значення пов'язана істотними труднощами.

Вказані труднощі передодозволяються за рахунок застосування ітеративних методів негладкої оптимізації, що використовують замість неіснуючого градієнта функції його загальбудування - субградієнт (той же квазіградієнт, узагальнені градієнт). Одним із таких методів є метод стохастичного субградієнту з проектуванням [2]:

$$x^{s+1} = \pi_X(x^s - \rho_s \xi^s), \quad s = 0, 1, \dots, n \quad (2)$$

де s – номер ітерації;

x^0 – початкове наближення - довільний покомпонентний обмежувальний вектор;

ρ_s -шаговий множник;

ξ^s -стохастичний квазіградієнт функції в точці x^s ,
тобто $M(\xi^s / \mathcal{R}_s) = \hat{F}(x^s)$ – узагальнений градієнт;

$\pi(y^s)$ – оператор проектування точки
 $y^s = x^s - \rho_s \xi^s$ на множині X .

Збіжність алгоритму (2) доведемо по Чезаро з вірогідністю 1 і кроковим множником [3]:

$$\rho_{s+1} = \rho_s \alpha_s (\xi^{s+1}, \Delta x^{s+1}) - \delta \rho_s, s = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

де $\alpha > 1, \delta, > 0, \rho_0 > 0, \Delta x^{s+1} = x^{s+1} - x^s$.

Нагадаємо, що під чезарською збіжності алгоритму

(2) розуміється збіжність послідовності $\{\bar{x}^s\}$, яка породжується співвідношенням

$$\bar{x}^s = \frac{\sum_0^s \rho_l x^l}{\sum_0^s \rho_l}, s = 0, 1, \dots,$$

до екстремальному множині функції $F(x)$.

Вектор \bar{x}^s представляє собою комбінацію точок траєкторії $x^l, l = 0, 1, \dots$, з ваговими коефіцієнтами $\rho_l / \sum_0^s \rho_l, l = 0, 1, \dots$

Відзначимо, що чезарну збіжність вдалося обґрунтувати при менш жорстких умовах, накладені на параметри алгоритму, ніж послідовність відповідності.

Доведенням сходимості алгоритму (2) в чезарському сенсі впливає з наступного твердження.

Теорема. Нехай $F(x)$ -опукла функція, задана на випуклі компактного множини $X \subset R^n$. Якщо виконані умови

$$\max_{x, y \in X} \|x - y\| = c_1, \text{ та } \sup_{x \in X} \|\xi^s\| \leq c_2, \forall s = 0, 1, \dots, \text{ майже мабуть,} \quad (4)$$

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \|b(s, x)\| \leq \bar{b}, \text{ i } \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \inf_{h \in \partial_x f(x, \omega)} \|\xi^s - h\|$$

майже мабуть, (5)

$$\rho_s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \infty, \sum_0^s \rho_s = \infty, \text{ майже мабуть}$$

$$\text{i } M \rho_s^2 < \infty. \quad (6)$$

і виконуватися хоча б одне з наступних співвідношень:

крок ρ_s залежить від $(x^0, \dots, x^s, \xi^0, \dots, \xi^{s-1})$,
вимірюємо щодо σ – алгебри, індукований

$$(x^0, \dots, x^s, \xi^0, \dots, \xi^{s-1});$$

$$\rho_s \rho_{s-1}^{-1} \longrightarrow 1 \text{ майже мабуть, } \rho_s \text{ залежить}$$

від $(x^0, \dots, x^s, \xi^0, \dots, \xi^s)$, вимірюємо щодо σ –
алгебри, індукований $(x^0, \dots, x^s, \xi^0, \dots, \xi^s)$.

У співвідношеннях (5) і (6) відповідно $\partial_x f(x, \omega)$ –
множина векторів, що є ймовірними оцінками
узагальнених градієнтів функції $F(x)$ і M -знак
математичного очікування.

Тоді для послідовності, що задається (2), (3),

виконується $\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} F(\bar{x}^s) - F(x^*) \leq \bar{b} c_1$ майже мабуть,

при $x^* \in X^* \triangleq \{x^* : F(x^*) = \min_{x \in X} F(x)\}$.

Наслідок Якщо виконуються всі умови теореми,
функція $F(x)$ має єдиний екстремум, то з ймовірністю 1.

Доведення теореми можна завершити
використовуючи кілька допоміжних лем [3], що
відносяться збіжності рядів, з урахуванням виконання
співвідношення (4) - (6).

ВИСНОВОК

В даній роботі здійснений аналіз актуальної задачі, яка
полягає в застосуванні субградієнтного алгоритму для
вирішення задач стохастичного програмування з
обмеженням. Визначено основні проблеми, що виникають
в процесі вирішення задач стохастично програмування та
методи їх вирішення.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. – М.: Наука, 1976.
- [2] Мирзоахмедов Ф., Урясьев С. П. Метод негладкой оптимизации с адаптивной регулировкой шага в детерминированном и стохастическом случаях. – Киев, 1981. – (Препр/ АН УССР, ИК: № 81 – 61).
- [3] Мирзоахмедов Ф., Урясьев С. П. Адаптивная регулировка шага для алгоритма стохастической оптимизации // ЖВМ МФ. – 1983. – 23, № 6. – С. 1314 – 1325.