

Комп'ютерне Моделювання Поведінки Стриження з Трилінійного Двофазного Матеріалу при Розтягуванні

Олександр Петров

кафедра теоретичної та комп'ютерної механіки
Дніпровський національний університет ім. Олесь Гончара
Дніпро, Україна
alex93203@rambler.ru, caf-vmi@ukr.net

Computer Simulation of Sample Behavior From Trilinear Two-Phase Material Under Tension

Alexander Petrov

dept. of Theoretical and Computer Mechanics
Oles Honchar Dnipro National University
Dnipro, Ukraine
alex93203@rambler.ru, caf-vmi@ukr.net

Анотація—У запропонованій роботі формується феноменологічна модель для опису властивостей сплавів з пам'яттю форми в точці. Встановлено, що класичні діаграми матеріалів представляють собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу, яке побудовано для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій.

Abstract—The present paper formulates a phenomenological model for describing the properties of alloys with shape memory at a specific point. It is established that the classical material diagrams is an envelope of a certain family of material diagrams constructed for certain laws of velocity variation and the front of strain rupture.

Ключові слова — псевдопружність; пам'ять форми; фазові переходи

Keywords — pseudoelasticity; shape memory; phase transitions

I. ВСТУП

В задачах механіки, де вивчається поведінка матеріалів, в яких мають місце фазові переходи, для побудови фізичних співвідношень між напругою та деформацією необхідно знати положення фронту фазового переходу $s = s(t)$ і функцію кінетичного відгуку $\dot{s} = \Phi(f)$ [1,2].

Узагальнена залежність між напругою σ і деформацією γ , в матеріальній точці моделюється кривою що зображена на Рис 1. При побудові такої діаграми задаються точки площини (σ_M, γ_M) і (σ_m, γ_m) ,

функції $\gamma = \psi_i(\sigma), i = 1, 2, 3$ і визначається змінна деформація перетворення

$$\gamma_T = \psi_3(\sigma) - \psi_1(\sigma).$$

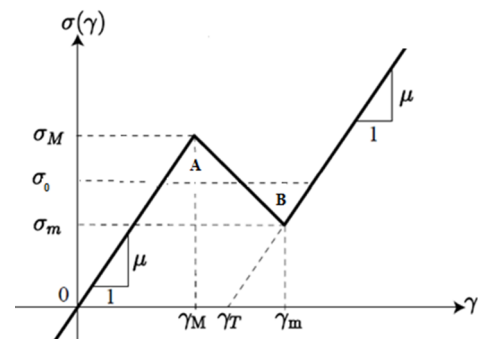


Рис. 1. Крива напруга-деформація для двофазного пружного матеріалу

Функції $\psi_i(\sigma)$ повинні задовольняти наступним вимогам.

$$\psi_1(0) = 0, \psi_1(\sigma_M) = \gamma_M, \psi'_1(\sigma) > 0,$$

$$\psi_2(\sigma_M) = \gamma_M, \psi_2(\sigma_m) = \gamma_m, \psi'_2(\sigma) < 0, \quad (1)$$

$$\psi_3(\sigma_m) = \gamma_m, \psi'_3(\sigma) > 0.$$

Поле зміщень в зразку повинно бути неперервним

$$u(x) = \begin{cases} \psi_3(\sigma)x, & 0 \leq x < s, \\ \psi_1(\sigma)x + \gamma_T(\sigma)s, & s \leq x \leq L. \end{cases}$$

Відповідний кусково-однорідний розподіл деформації в стрижени дається формулою

$$\gamma(x) = \begin{cases} \psi_3(\sigma), & 0 \leq x < s, \\ \psi_1(\sigma), & s \leq x \leq L. \end{cases}$$

Залежність між збільшенням довжини $u(L) = \delta$ стрижня і напругою визначається виразом

$$\delta = \psi_3(\sigma)s + \psi_1(\sigma)(L - s). \quad (2)$$

Тут s - положення границі розділу фаз.

Рівняння (2) дає змогу визначити сімейство $\delta(\sigma, s)$. Якщо δ задано, то можна знайти напругу σ , розв'язуючи відповідно до умов (1) крайову задачу нелінійної пружності. При цьому з виразу (2) не можна зразу визначити σ оскільки невідомо положення границі розділу фаз.

Для однозначного розв'язку цієї задачі необхідно надати допоміжну інформацію окрім рівняння балансу (2), фізичних співвідношень $\gamma = \psi_i(\sigma), i = 1, 2, 3$, граничних умов і вимог до гладкості. Зазвичай ці вимоги достатні при відсутності нестійких ділянок діаграми, для звичайних еластичних матеріалів, для яких напруга монотонно зростає зі збільшенням деформації.

Порушення єдності виникає в (2), якщо задано σ , а не δ . Ця проблема може бути вирішена шляхом введення поняття рушійної сили f . Вона визначається так

$$f(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \gamma_T(\sigma) d\sigma. \quad (3)$$

Тут $\sigma_0 = (\sigma_M + \sigma_m) / 2$ - напруга Максвела. Напругу Максвела можна інтерпретувати геометрично як напругу, при якій дві площі, обмежені кривою напруга-деформація, мають рівну площу. Оскільки напруга в стані рівноваги в змішаній фазі повинна знаходитися між σ_m і σ_M , то діапазон можливих значень рушійної сили $[f_m, f_M]$. Розглянемо квазістатичний процес, в якому треба визначити функції часу $\sigma = \sigma(t), s = s(t), \delta = \delta(t)$.

Похідна за часом від виразу (2) дає наступне нелінійне рівняння

$$\dot{\delta} = \gamma_T(\sigma)\dot{s} + (\gamma'_T(\sigma)s + \psi'_1(\sigma)L)\dot{\sigma}. \quad (4)$$

Тут точкою позначено похідні за часом, а штрихом похідні по σ .

В загальному випадку дотичний модуль діаграми матеріалу можна визначити з (4) так

$$\frac{d\sigma}{d\delta} = \frac{L - \gamma_T(\sigma)\dot{s} / \dot{\delta}}{\psi'_1(\sigma)L + \gamma'_T(\sigma)s}.$$

При його обчисленні треба попередньо визначити функції $\sigma = \sigma(t), s = s(t)$, а для цього до рівняння (4) слід додати функцію кінетичного відгуку $\dot{s} = \Phi(f)$ (Рис. 2) і вираз для рушійної сили (3), який можна представити так

$$f(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} [\psi_3(\sigma) - \psi_1(\sigma)] d\sigma \quad (5)$$

II. ТРИЛІНІЙНИЙ ДВОФАЗНИЙ МАТЕРІАЛ

Для трилінійного двофазного матеріалу з різними модулями пружності $\mu_1 \neq \mu_3$ і відповідно змінною трансформаційною деформацією γ_T на основі наведених вище формул (4) і (5) можна записати залежності між напругою і збільшенням довжини пружного зразка, а також для рушійної сили.

Рівняння першої прямої на ділянці $\gamma \in [0; \gamma_M], \sigma \in [0; \sigma_M]$ має вигляд

$$\gamma(\sigma) = \psi_1(\sigma) = \sigma / \mu_1. \quad (6)$$

Рівняння прямої на ділянці $\gamma \in [\gamma_m; \infty), \sigma \in [\sigma_m; \infty)$ має вигляд

$$\gamma(\sigma) = \psi_3(\sigma) = \gamma_m + (\sigma - \sigma_m) / \mu_3. \quad (7)$$

Звідки

$$\gamma_T(\sigma) = k\sigma + b, \quad (8)$$

де

$$k = 1 / \mu_3 - 1 / \mu_1, b = \gamma_m - \sigma_m / \mu_3.$$

На основі формул (4)-(8) запишемо

$$\dot{\delta} = (k\sigma + b)\dot{s} + (ks + L / \mu_1)\dot{\sigma}. \quad (9)$$

$$f(\sigma) = (k \frac{\sigma^2}{2} + b\sigma) - (k \frac{\sigma_0^2}{2} + b\sigma_0). \quad (10)$$

Звідси отримаємо

$$\dot{f}(\sigma) = \gamma_T(\sigma)\dot{\sigma} = (k\sigma + b)\dot{\sigma}.$$

Для трилінійного двофазного матеріалу з однаковими модулями пружності $\mu_1 \equiv \mu_3 = \mu$ на основі формул (8) отримаємо

$$k = 0, b \equiv \gamma_T = \gamma_m - \sigma_m / \mu.$$

В результаті цього спроститься диференціальне рівняння (9)

$$\dot{\delta} = b\dot{s} + L\dot{\sigma} / \mu$$

і вираз для рушійної сили (10)

$$f(\sigma) = b(\sigma - \sigma_0).$$

Границі зміни рушійної сили будуть такими

$$f_m = b(\sigma_m - \sigma_0), f_M = b(\sigma_M - \sigma_0),$$

Розглянемо випадок, коли функція кінетичного відгуку $\dot{s} = \Phi(f)$ буде мати вигляд, представлений на Рис. 2.

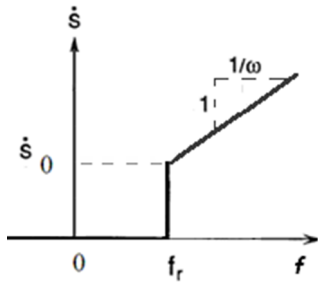


Рис. 2. Схематичний графік функції кінетичного відгуку.

Ця функція може бути задана аналітично [2].

$$\dot{s} = \begin{cases} 0; & f \in [0; f_r]; \\ \dot{s}_0 + \omega(f - f_r). & \end{cases} \quad (11)$$

На першій ділянці (до фазового переходу) $\dot{s} \equiv 0; s \equiv 0$. В силу цього рівняння (4) набуде вигляд

$$\dot{\delta} = \psi'_1(\sigma)L\dot{\sigma}.$$

Звідси отримаємо формулу для обчислення дотичного модуля діаграми

$$\frac{d\sigma}{d\delta} = \frac{1}{\psi'_1(\sigma)L}.$$

На другій ділянці (після фазового переходу) рівняння (4) з урахуванням (11) прийме вигляд

$$\dot{\delta} = \gamma_T(\dot{s}_0 + \omega(f - f_r)) + (\gamma'_T s + \psi'_1 L) \frac{\dot{f}}{\gamma_T}.$$

$$s = (\dot{s}_0 - \omega f_r)(t - t_r) + \omega \int_{t_r}^t f(\tau) d\tau. \quad (12)$$

В результаті

$$\dot{f} = \frac{\gamma_T}{\gamma'_T s + \psi'_1 L} [\dot{\delta} - \gamma_T(\dot{s}_0 + \omega(f - f_r))]. \quad (13)$$

Для випадку трилінійного двофазного матеріалу з однаковими модулями пружності отримаємо

$$\dot{f} = \frac{\mu b}{L} [\dot{\delta} - b(\dot{s}_0 + \omega(f - f_r))].$$

Після інтегрування можна записати

$$f(t) = \alpha_* + (f_r - \alpha_*) e^{-(t-t_r)/\beta},$$

$$\beta = \frac{\mu b^2 \omega}{L}, \alpha_* = (\dot{\delta} / b - \dot{s}_0 + f_r) / \omega$$

$$t \in [t_r; \infty), f(t_r) = f_r, f(t_r) = f_r < f_M.$$

З метою спрощення запису введемо позначення

$$c_1 = b^2 + 2k(c + f_r), F = f - f_r.$$

Перепишемо (12), (13) так

$$\dot{F} = \Phi(F, s), s = \dot{s}_0(t - t_r) + \omega \int_{t_r}^t F(\tau) d\tau,$$

$$\Phi(F, s) = \frac{\gamma_T(F)}{ks + L/\mu_1} [\dot{\delta} - \gamma_T(F)(\dot{s}_0 + \omega F)], \quad (14)$$

$$\gamma_T(F) = \sqrt{c_1 + 2kF}.$$

На першій ділянці (до фазового переходу) $\dot{s} \equiv 0; s \equiv 0; t \in [0; t_r]$. З формул (9) і (10) отримаємо

$$\dot{\sigma} = \frac{\mu_1}{L} \dot{\delta} \Rightarrow \sigma = \frac{\mu_1}{L} \dot{\delta} \cdot t,$$

$$\dot{f}(\sigma) = (k\sigma + b)\dot{\sigma} = \left(\frac{k\mu_1 \dot{\delta}}{L} t + b \right) \frac{\mu_1}{L} \dot{\delta}.$$

Інтегруючи останню рівність, отримаємо

$$f(t) = k \left(\frac{\mu_1 \dot{\delta}}{L} \right)^2 \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{b\mu_1 \dot{\delta}}{L} \cdot t,$$

$$t \in [0; t_r], f(0) = 0, f(t_r) = f_r < f_M.$$

На другій ділянці систему рівнянь (14) будемо розв'язувати чисельно при наступних умовах

$$s(t_r) = 0, F(t_r) = 0.$$

Для цього введемо сітку за часом і зробимо позначення

$$t_p = t_{p-1} + \tau, p = 1; 2; 3; \dots, t_0 = t_r,$$

$$s^p = s(t_p), F^p = F(t_p),$$

$$\Phi^p = \Phi(F^p, s^p), \gamma_T^p = \gamma_T(F^p).$$

В результаті диференціальне рівняння та інтеграл (14) можна замінити еквівалентними різницеvim рівняннями і сумою. Звідси отримаємо розрахункові формули, для рушійної сили F

$$F^{p+1} = F^p + \tau \cdot \Phi(F^p, s^p), s^p = p \cdot \dot{s}_0 \cdot \tau + \omega \cdot J^p,$$

$$J^p = J^{p-1} + \frac{\tau}{2}(F^{p-1} + F^p), J^0 = 0, F^0 = 0.$$

III. ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

При чисельному розв'язанні системи (14) за допомогою наведених різницеvim формул спочатку задаються $L, \omega, \dot{s}_0, \dot{\delta}, \gamma_M, \sigma_M, \gamma_m, \sigma_m, \mu_1, \mu_3, \tau$.

Обчислюються $k, k_0, k_1, b, \sigma_0, c, \mu_2$, а потім $t_r, f_r, c_1, b, \sigma_0, \mu_2$.

Результати розрахунків наведено нижче. На Рис.3. показана типова залежність для швидкості розповсюдження фазового переходу від часу. Графік має три ділянки. На першій ділянці швидкість дорівнює нулю, а на третій досягає постійного значення. Між ними міститься ділянка зі змінною швидкістю. В результаті обчислення дотичного модуля на кожному кроці інтегрування за часом для інтегральної діаграми матеріалу теж маємо три характерні ділянки (Рис.4).

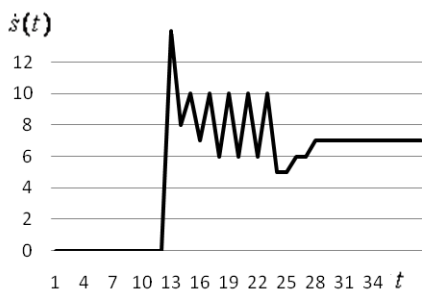


Рис. 3. Швидкість розповсюдження фазового переходу

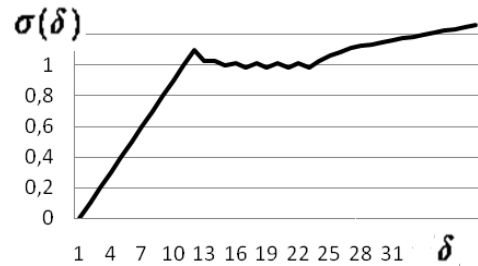


Рис. 4. Інтегральна діаграма матеріалу

Перша ділянка відповідає пружній поведінці матеріалу. Третя характеризує зміцнення матеріалу. Між ними міститься ділянка, яка нагадує поведінку ідеально пластичного матеріалу.

ВИСНОВКИ

Як встановлено в експериментальних дослідженнях поведінку матеріалу в точці тіла в загальному випадку відрізняється від поведінки зразка в цілому. У роботі формулюється феноменологічна модель для опису властивостей матеріалу саме в точці. Для опису пружної деформації і деформації фазового перетворення використовувалася діаграма пружного матеріалу, що складається з трьох прямолінійних ділянок. Таке трактування теорії призводить до нестійкої діаграми напруження-деформація і вимагає рішення граничної задачі з урахуванням розвитку фронту деформації перетворення. Таке трактування дозволило з позиції досить простої моделі матеріалу описати ряд експериментальних даних на різних зразках при різних умовах навантаження. Встановлено, що класичні діаграми матеріалів представляють собою криву, що огинає деяке сімейство діаграм матеріалу, побудоване для певних законів зміни швидкості фронту розриву деформацій.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Abeyaratne R., Knowles J.K. Evolution of phase transitions. – Cambridge University Press, 2006. – 258 p.
- [2] Shaw J. A., Kyriakides S. On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a NiTi alloy. Acta Materialia, 1997. – No 45, p.683-700.