

Моделювання Еволюції Поодиноких Хвиль в Конструкційних Матеріалах

Ярема Рушицький
відділ реології, Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка,
Національна академія наук України
Київ, Україна
rushch@inmech.kiev.ua

Василь Юрчук
відділ реології, Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка,
Національна академія наук України
Київ, Україна
reol@inmech.kiev.ua

Modeling the Evolution of Solitary Waves in the Engineering Materials

Jeremiah Rushchitsky
Department of Rheology, S.P.Timoshenko Institute of
Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine
Kyiv, Ukraine
rushch@inmech.kiev.ua

Vasyl Yurchuk
Department of Rheology, S.P.Timoshenko Institute of
Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine
Kyiv, Ukraine
reol@inmech.kiev.ua

Анотація—З метою вивчення еволюції початкового профіля внаслідок слабкої нелінійності матеріалу теоретично і чисельно проаналізовано поширення поздовжніх хвиль з початковим гармонічним і дзвіноподібним профілями, поперечних хвиль з початковим профілем у вигляді функції Уїттекера, циліндричних хвиль з початковим профілем у вигляді функції Макдональда. Проведено порівняльний аналіз нелінійних поодиноких хвиль з різними початковими профілями на основі отриманих авторами розв'язків, що включає вплив довжини хвилі (підшви), початкової амплітуди і параметрів матеріалу на еволюцію хвиль.

Abstract—To study the evolution of initial profile owing to weak nonlinearity of material, the propagation of longitudinal waves with the initial harmonic and bell-shaped profiles, transverse waves with initial profile in the form of Whittaker function, cylindrical waves with initial profile in the form of Macdonald function is analyzed theoretically and numerically. An comparative analysis is carried out for the solitary waves with different initial profiles basing on the obtained by authors solutions that includes an effect of the wave length (bottom), initial amplitude, and material parameters on the wave evolution.

Ключові слова—подинока пружна хвиля; нелінійне хвильове рівняння; числове моделювання; еволюція хвилі

Keywords—solitary elastic wave; nonlinear wave equation; numerical modeling; wave evolution

Теорія нелінійних хвиль в пружних матеріалах являє собою великий розділ нелінійної теорії пружності, який через властиві теорії нелінійних хвиль математичні труднощі не є закінченим до цього часу і розвивається у багатьох наукових центрах світової механіки. З іншого боку, сучасна промисловість виробляє незлічену кількість машин,

конструкцій, приладів, устаткування, які або постійно працюють у динамічних режимах, або у роботі яких використовуються механізми поширення хвиль, або в яких іноді спостерігаються хвильові процеси. Тому знання про хвилі є затребуваним продуктом для сучасної промисловості. Зпосеред маси різноманітних хвиль виділяються певні типи, затребуваність яких є особливою. Саме до таких відносяться поодинокі хвилі, знання про які є потрібним фактично у всіх галузях практичної діяльності людини – від медицини до архітектури, від машинознавства до історії. Підтвердження цього можна знайти у пошуковій системі Google за ключовими словами solitary waves in materials.

Поодинокі хвилі мають давню історію. Вважається, що дослідження таких хвиль бере початок від спостережень Рассела (1838 рік) поодиноких хвиль в одному із водних каналів Англії. З тих пір поодинокі хвилі традиційно вивчаються в рамках гідромеханіки. Переважаюча кількість результатів відноситься до особливого типу поодиноких хвиль – солітонів. Існує багато монографій і оглядів на цю тему. Поодинока хвиля в даному дослідженні розуміється як хвиля з залежним від просторових координат профілем, що концентрується в обмеженій частині простору і здебільшого має вигляд одного або кількох горбів. Відмінність так означеної поодинокі хвилі від солітону полягає у тому, що вона взаємодіє сама з собою і іншими хвилями, змінюючи при поширенні свій початковий профіль.

Дане дослідження проведене в рамках нелінійної теорії пружності для конкретного потенціалу Мурнагана. Він є кубічним щодо тензора деформацій і записується через компоненти нелінійного тензора деформацій Гріна $\varepsilon_{ik}=(1/2)\times$

$\times(u_{i,k}+u_{k,i}+u_{m,i}u_{m,k})$ у вигляді $W(\varepsilon_{ik})=(1/2)\lambda(\varepsilon_{mm})^2+\mu(\varepsilon_{ik})^2+(1/3)A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km}+B(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mm}+(1/3)C(\varepsilon_{mm})^3$, або через перші алгебраїчні інваріанти I_k цього тензора

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{1}{3}A I_3 + B I_1 I_2 + \frac{1}{3}C I_1^3$$

$(I_1 = \text{tr}(\varepsilon_{ik}), I_2 = \text{tr}[(\varepsilon_{ik})^2], I_3 = \text{tr}[(\varepsilon_{ik})^3])$, λ, μ є пружними постійними Ляме, A, B, C - постійними Мурнагана).

Модель Мурнагана вважається класичною в нелінійній теорії гіперпружних матеріалів, вона враховує всі квадратичні і кубічні складові і описує деформування великого класу конструкційних та інших матеріалів.

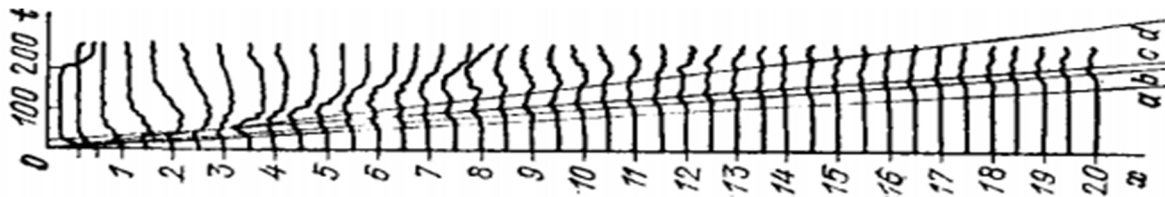


Рис. 1. Хвиля радіального зміщення [1]

Далі до нелінійних хвильових рівнянь застосовувався наближений метод, оснований на перетворенні хвильового рівняння і обмеженні на градієнт зміщення. Розглянемо для прикладу нелінійне рівняння, що описує поздовжню плоску хвилю $u_{1,1} - (v_L)^2 u_{1,1} = (N_1/\rho)u_{1,1}u_{1,1}$. Припустимо, що поодинокі хвилі з початковим профілем у вигляді $F(ax_1)$ поширюється у такому ж вигляді, але функція F вже залежить від фазової змінної $\sigma = a(x_1 - vt)$, тобто $u(x_1, t) = F[a(x_1 - vt)]$, де $v = \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}}$ - швидкість поширення хвилі, $\alpha = [N_1/(\lambda + 2\mu)]$. Далі корінь $\sqrt{1 + \alpha u_{1,1}}$ розкладемо за умови $|\alpha u_{1,1}| \ll 1$ за першими двома наближеннями і запишемо розв'язок у вигляді $u_1(x_1, t) \cong F[a(x_1 - v_L t - (1/2)\alpha u_{1,1} t)]$.

Тоді отриманий розв'язок розкладемо в ряд Тейлора за малим параметром $\delta = -(1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t$ в околі постійного значення фази $\sigma = a(x_1 - v_L t)$: $u_1(x_1, t) \approx F(\sigma) + F'(\sigma) a \delta = F(\sigma) - (1/2)\alpha a^2 v_L t [F'(\sigma)]^2$.

Отримане наближене представлення розв'язку має загальний характер і для різних конкретно вибраних функцій описує один і той же нелінійний хвильовий ефект - виникнення (окрім першої гармоніки) другої гармоніки чи подібних до неї нових доданків і збільшення амплітуди другого доданка з часом поширення хвилі.

В рамках моделі Мурнагана отримано різні типи нелінійних хвильових рівнянь. Їх особливістю є те, що ліві частини є класичними лінійними хвильовими рівняннями. Праві частини включають лише квадратично нелінійні доданки. Ця структура виявилася дуже зручною в наближених дослідженнях поширення хвиль. Друга особливість полягає в тому, що, на відміну від лінійних хвильових рівнянь, нелінійні рівняння є зв'язаними і цей зв'язок не є симетричним.

Поодинокі хвилі в конструкційних матеріалах вивчалися експериментально досить кваліфіковано. Нижче показано один з класичних результатів Белла: радіальні зміщення при поздовжному ударі кульки в стержень, t - час в мкс, x - відстань від торця, по якому відбувся удар. Для кожного перетину, який знаходиться на вказаній відстані на осі стержня, отримано графік профілю хвилі радіального зміщення [1].

Далі показано коротко результати вивчення еволюції поодиноких хвиль з чотирма різними початковими профілями.

Гармонічний профіль. Наближений розв'язок для плоскої поздовжньої хвилі має наступний вигляд [2]:

$$u_1(x_1, t) = a^0 e^{-ik_L(x_1 - c_L t)} - (1/2)c_L t \alpha (k_L)^2 (a^0)^2 e^{-2ik_L(x_1 - c_L t)}$$

На рис. 2 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для наступних значень параметрів: матеріал - алюміній, $\alpha = -16,811$, $a^0 = 1 \cdot 10^{-5}$, $\omega = 0,8 \cdot 10^5$.

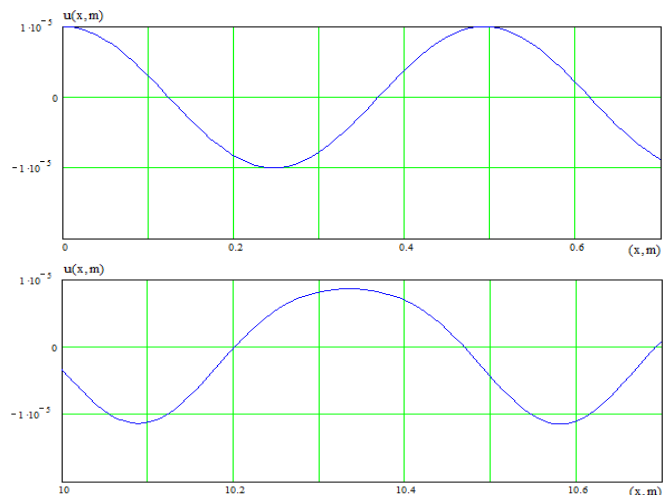


Рис. 2. Графіки еволюції гармонічної хвилі

Із зіставлення Рис. 2 та відповідних рисунків, отриманих класичним методом послідовних наближень [2], випливає що еволюція початкового профіля хвилі відбувається з практично однаковим якісним результатом, однак швидкість еволюції різна. Це пов'язано з тим, що методи основані на певних обмеженнях.

Дзвіноподібний профіль (у формі функції Гаусса чи Чебишова-Ерміта нульового порядку). Наближений розв'язок для плоскої поздовжньої хвилі має наступний вигляд [2,3]:

$$u_1(x_1, t) = A^0 e^{-[a^2(x_1 - c_L t)^2 / 2]} - (1/2) t a c_L a^2 (x_1 - c_L t)^2 (A^0)^2 e^{-a^2(x_1 - c_L t)^2}$$

На Рис. 3 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, при наступних значеннях параметрів: матеріал - алюміній $\alpha = -16,811$, $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$, параметр, що визначає довжину підшови хвилі $a = 20$. На нижньому графіку зіставлено початковий і деформований профілі

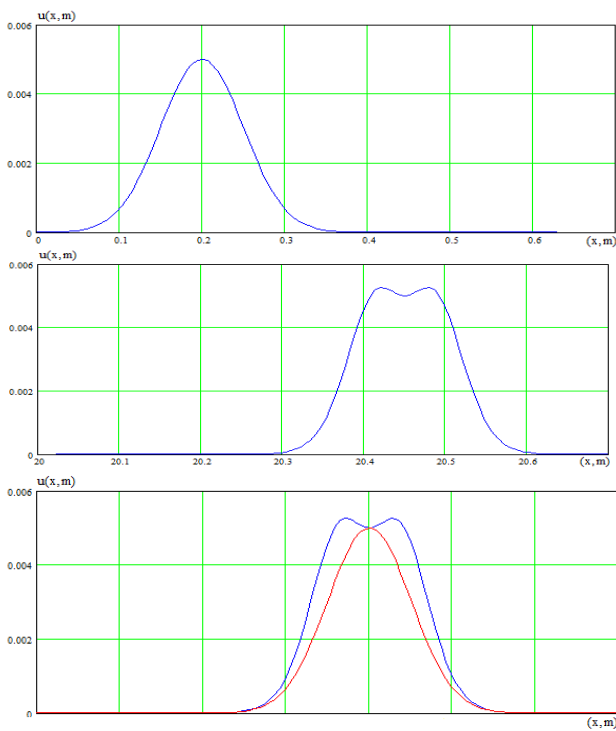


Рис. 3. Графіки еволюції дзвіноподібної хвилі

З графіків Рис. 3 випливає, що дисторсія початкового профіля зростає зі збільшенням відстані, яку пройшла хвиля. Отже, вплив «другої гармоніки» на еволюцію початкового профілю хвилі достатньо великий. Аналогічно проведені дослідження для різного типу матеріалів, різної довжини хвилі та різного максимального значення амплітуди. Всі отримані графіки свідчать, що дисторсія початкового профіля є суттєвою. Швидкість еволюції залежить від характеристик матеріалу і профіля.

Профіль у вигляді функції Уїттекера. Наближений розв'язок для плоскої поздовжньої хвилі має наступний вигляд [4]:

$$u(x, t) = a_0 W_{1/4, 1/4}(a(x - c_L t)) - (1/2) t a c_L (a)^2 (a_0)^2 \times \left(\left(\frac{1}{4a(x - c_L t)} - \frac{1}{2} \right) W_{1/4, 1/4}(a(x - c_L t)) \right)^2$$

На рис. 4 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, для наступних значень параметрів: матеріал - алюміній $\alpha = -16,811$, $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$, параметр, що визначає довжину підшови хвилі $a = 30$. На нижньому графіку зіставлено початковий і деформований профілі.

Отже одинична хвиля з несиметричним профілем у вигляді функції Уїттекера еволюціонує таким чином: зменшується початкова амплітуда, ліва та права частини горба по ступово стають крутішими, профіль поступово зміщується вправо, сформований профіль нагадує дзвіноподібний. Підшова хвилі у всіх випадках залишається незмінною.

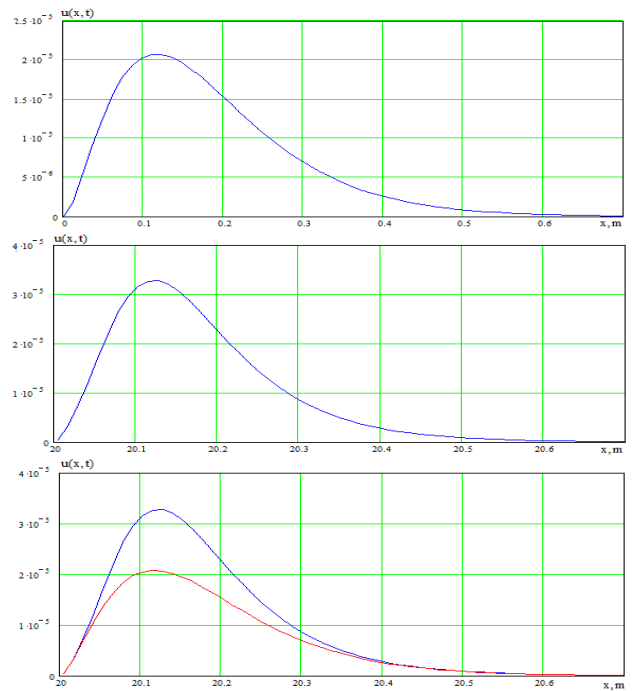


Рис. 4. Графіки еволюції хвилі з профілем функції Уїттекера

Порівняння еволюції симетричної дзвіноподібної хвилі та хвилі з несиметричним профілем у вигляді функції Уїттекера показує, що профілі першої змінюються симетрично, тоді як профіль другої – несиметрично.

Дзвіноподібний профіль. Однак хвиля плоска поперечна.

Нелінійне хвильове рівняння поширення має вигляд [5]: $\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = N_4 u_{3,11} (u_{3,1})^2$ (права частина містить кубічну нелінійність)

$$u_3(x_1, t) \approx u_3^o e^{-(\sigma^o)^2(x_1 - v_T t)^2/2} + (1/2)t\alpha_3 v_T (\sigma^o)^3 (x_1 - v_T t)^3 (u_3^o)^3 e^{-3(\sigma^o)^2(x_1 - v_T t)^2/2}.$$

На Рис. 5 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, що пройшла хвиля, що відповідають розв'язку (13) для плоскої поперечної хвилі дзвіноподібного профіля для таких значень параметрів: матеріал – алюміній, $\alpha_3 = -82,648$; $u_3^o = 8 \cdot 10^{-3}$, параметр, що визначає довжину підосви хвилі $\sigma^o = 0,8$.

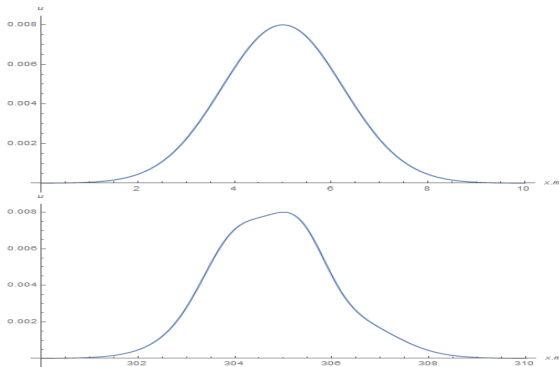


Рис. 5. Графіки еволюції дзвіноподібної хвилі

Графіки Рис. 5 свідчать про суттєву еволюцію початкового профіля хвилі. При цьому ширина горба і значення максимальної амплітуди залишаються незмінними. Порівняння зі зміною профіля дзвіноподібної поодинокі поздовжньої хвилі показує, що дзвіноподібна поперечна хвиля змінює свій профіль дещо по-іншому. Відмінності в еволюції поперечної і поздовжньої хвилі, що викликані відмінностями нелінійного деформування – кубічна для поперечного та квадратична для поздовжнього.

Профіль у вигляді функції Макдональда. Однак хвиля циліндрична, яка поширюється від циліндричної порожнини вздовж радіуса циліндра і залежить від радіуса і часу. Нелінійне хвильове рівняння є таким:

$$(c_L)^2 (1 - \tilde{N}_1 u_{r,r}) \left(u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - u_{r,tt} = 0.$$

Наближений розв'язок має наступний вигляд: $u_r(r, t) \approx a^o K_0(a(r - c_L t)) - (1/2) \tilde{N}_1 a c_L t (a^o)^2 [K_1(a(r - c_L t))]^2$.

Підставляючи в останню формулу наближені значення функцій K_0 і K_1 отримуємо розв'язок:

$$u_r(r, t) \approx a^o \sqrt{\frac{2}{\pi a(r - c_L t)}} e^{-a(r - c_L t)} - (1/2) \tilde{N}_1 a c_L t (a^o)^2 \times \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{a(r - c_L t)}} + \frac{1}{\sqrt{a(r - c_L t)}} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-a(r - c_L t)} \right]^2.$$

На Рис. 6 показані графіки поширення хвилі для таких значень параметрів: алюміній $\tilde{N}_1 = -16,811$; $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ та параметр, що відповідає довжині підосви хвилі $a = 5$.

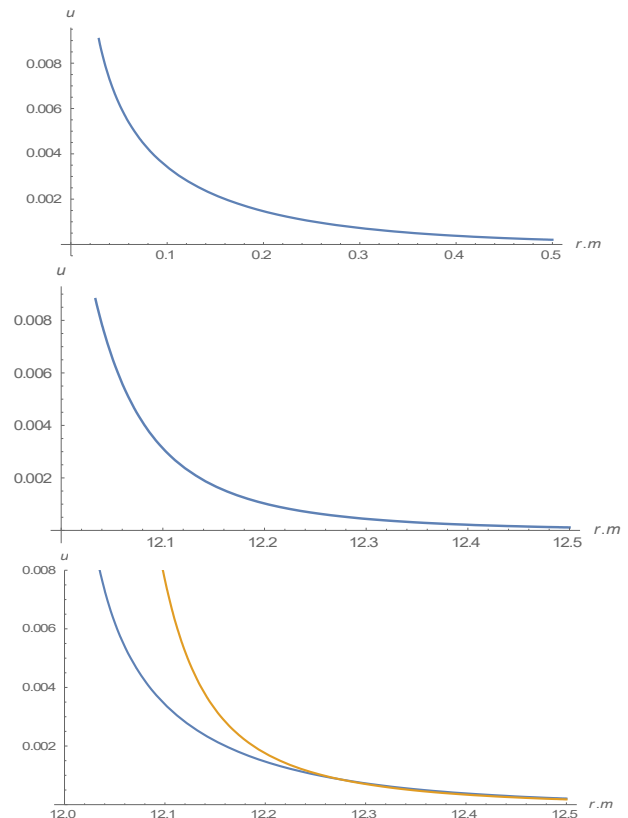


Рис. 6. Графіки еволюції хвилі з профілем функції Макдональда

На нижньому графіку Рис. 6 зіставлено початковий і деформований профіль. Графіки свідчать про суттєву еволюцію початкового профіля і зміну параметрів хвилі, та значну зміну значення максимальної амплітуди.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Flügge's Encyclopedia of Physics. Vol. VIa/1. Mechanics of solids. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [2] J. J. Rushchitsky, Nonlinear Elastic Waves in Materials. Series: Foundations of engineering mechanics, Heidelberg: Springer, 2014.
- [3] J. J. Rushchitsky, V. N. Yurchuk, "An Approximate Method for Analysis of Solitary Waves in Nonlinear Elastic Materials", Int. Appl. Mech., 52, N3, P. 282-289. 2016.
- [4] V. N. Yurchuk, J. J. Rushchitsky, "Numerical Analysis of Evolution of Plane Longitudinal Nonlinear Elastic Waves with Different Initial Profiles", Int. Appl. Mech., 53, N1, P.104-121. 2017.
- [5] V. N. Yurchuk, J. J. Rushchitsky, "Evolution of SV-Wave with Gaussian Profile", Int. Appl. Mech., 53, N3, P.300-304. 2017.
- [6] V. N. Yurchuk, J. J. Rushchitsky, "Numerical Analysis of Evolution of Solitary Cylindrical Radial Wave with an Initial Profile in the Form of Macdonald Function", Int. Appl. Mech., 54, N3, P.312-317. 2018.