Комп'ютерне Моделювання Модифікованого Методу Оптимальної Зупинки

Леонід Файнзільберг
кафедра біомедичної кібернетики
Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського
Київ, Україна
fainzilberg@gmail.com

Юлія Яременко
кафедра біомедичної кібернетики
Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського
Київ, Україна
juliayaremenko98@gmail.com

Computer Modeling of the Modified Method of Optimal Stopping

Leonid Fainzilberg
department of biomedical cybernetics
Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute
Kyiv,Ukraine
fainzilberg@gmail.com

Yulia Yaremenko
department of biomedical cybernetics
Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute
Kyiv,Ukraine
juliayaremenko98@gmail.com

***Анотація* — розглядається модифікований метод оптимальної зупинки, який, на відміну від традиційного, передбачає послідовний пошук найкращої альтернативи з заданою поступкою. На основі статистичного експерименту визначені оптимальний крок зупинки та імовірність успіху при різних значеннях поступки.**

***Abstract* — the modified method of optimal stopping , which, unlike the traditional one, involves a consistent search for the best alternative with a given concession is considered. On the basis of the statistical experiment were defined the optimal stopping step and the probability of success with different values of concession.**

Ключові слова — альтернатива; особа, що приймає рішення; послідовний аналіз.

Keywords — alternative; decision maker; sequential analysis.

I. Вступ

Задача оптимальної зупинки виникає при рішенні багатьох прикладних задач, зокрема задач пошуку

- кандидата на вакантну посаду за результатами послідовного кастингу;
- місця паркування або заправки автомобіля на дорозі з рухом в одному напрямку;
- найбільш привабливого банку для отримання кредиту;
- квартири для оренди або купівлі в великому місті;
- окремого товару на ринку.

Передбачається, що на основі послідовного аналізу альтернатив у випадковому порядку особа, що приймає рішення (ОПР), має обрати найкращу з альтернатив зі скінченої множини за таких обмежень:

- кожну з альтернатив переглядають лише один раз;
- на кожному кроці ОПР може прийняти одне з двох рішень: або продовжити пошук кращої альтернативи, або зупинитися, вважаючи, що поточна альтернатива не тільки краща за попередні, але й найкраща з усіх альтернатив.

II. Традиційний метод оптимальної зупинки

Нехай $D = \{d_1, ..., d_N\}$ – скінчена множина альтернатив. Припускають, що особа, яка приймає рішення (ОПР), заздалегідь не знає особисті якості альтернатив $d_1, ..., d_N$, але на основі «експерименту» може їх послідовно порівнювати та визначити альтернативу, яка має переваги над попередніми. Також вважають, що для альтернатив виконується традиційна властивість транзитивності [1]:

$$\text{якщо } d_i \succ d_j \text{ та } d_j \succ d_z \text{, то } d_i \succ d_z \qquad (1)$$

Оскільки альтернативи переглядаються у випадковому порядку, то зрозуміло, що на кожному кроці $t = 1, ..., N$

імовірність появи найкращої альтернативи дорівнює $P_0 = 1/N$.

Задача оптимальної зупинки ставить за мету знайти такий крок $t^* \in [1, N]$, на якому слід зробити остаточний вибір, щоб максимізувати імовірність $P > P_0$ вибору найкращої альтернативи з усіх можливих, тобто:

$$t^* = \underset{\substack{1 \le t \le N \\ \forall j \ne t}}{\arg\max} P(d_t \succ d_j), \quad j = 1, ..., N \tag{2}$$

Існують різні підходи до аналітичного визначення оптимального кроку зупинки, що задовольняє умову (2) [2-5].

Зрозуміло, що на будь-якому кроці ОПР має тривіальне рішення – відкинути альтернативу, якщо вона гірша за попередні. Якщо ж чергова альтернатива краща за усі попередні, то ОПР має прийняти нетривіальне рішення: або обрати поточну альтернативу як найкращу або відкинути її, чекаючи, що більш краща буде далі.

Оптимальний крок t^* зупинки може бути визначений за допомогою методу динамічного програмування [5].

Введемо означення випадкових подій:

A – ОПР обрала найкращу альтернативу з усієї множини $D = \{d_1, ..., d_N\}$;

B_t – ОПР обрала поточну альтернативу на t-му кроці, вважаючи що вона залишиться найкращою далі;

$\overline{B}_t$ – ОПР відкинула поточну альтернативу на t-му кроці, вважаючи що краща буде далі.

Для визначення оптимальної стратегії, яка забезпечує найбільшу імовірність $P = P(A)$, розглянемо дві умовні імовірності:

$g_t = P(A \mid B_t)$ – імовірність випадкової події, яка полягає у тому, що поточна альтернатива на t-му кроці не лише краща за всі попередні, а й найкраща з усіх альтернатив множини $D = \{d_1, ..., d_N\}$;

$h_t = P(A \mid \overline{B}_t)$ – імовірність обрати найкращу альтернативу, якщо ОПР на t-му кроці відкине поточну альтернативу (хоча вона виявилась кращою за попередні) у припущенні, що починаючи з наступного $t+1$-го кроку ОПР використовує оптимальну стратегію.

Зрозуміло, що оптимальна стратегія ОПР на t-му кроці така:

а) відкинути альтернативу, якщо вона не краща за попередні;

б) обрати поточну альтернативу, якщо вона краща за попередні та виконується умова

$$g_t \ge h_t \; . \tag{3}$$

На основі методу динамічного програмування можна довести [5], що

$$g_t = \frac{t}{N}, \tag{4}$$

а

$$h_t = \frac{t}{N}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + ... + \frac{1}{N-1}\right). \tag{5}$$

З умови $g_t = h_t$ з урахуванням виразів (4) та (5) безпосередньо випливає, що оптимальний крок зупинки визначається за формулою

$$t^* = N / e\,, \tag{6}$$

де $e = 2{,}71828$, причому найбільша імовірність успіху $P \approx 0{,}368$ досягається при виборі першої з альтернатив, яка перевершує всі альтернативи на попередніх кроках $1, 2, ..., t^*$.

III. Модифікований метод оптимальної зупинки

Припустимо, що кожну з альтернатив множини $D = \{d_1, ..., d_N\}$ характеризує сукупність критеріїв $x_1, ..., x_Q$. Якщо припустити, що для критеріїв виконується умова незалежності за перевагами [6], то для порівняння якостей альтернатив можна перейти від критеріїв $x_1, ..., x_Q$ до суперкрітерію у вигляді адитивної згортки

$$x^0 = \sum_{k=1}^{Q} a_k x_k \; , \tag{7}$$

де a_k – вагові коефіцієнти, що характеризують відносну важливість k-го критерію x_k у суперкрітарії x^0.

При відсутності об'єктивних міркувань про значення вагових коефіцієнтів a_k відносну важливість критеріїв можна заздалегідь визначити, наприклад, за методом Сааті [7] на основі таблиць парних порівнянь, наданих експертами.

Тепер припустимо, що метою ОПР є не вибір найкращої альтернативи з усієї множини $D = \{d_1, ..., d_N\}$, а вибір альтернативи $\widetilde{d}^* \in D$, яка за суперкритерієм $x^0(d)$ відрізняється від найкращої альтернативи не більше як на задану величину поступки $\Delta \ge 0$. Іншими словами, поставимо задачу знайти такий оптимальний крок t^* послідовного перегляду альтернатив з множини D, на якому буде максимальна імовірність $\widetilde{P}$ вибору альтернативи, що задовольняє умову

$$\left| x^0(\widetilde{d}^*) - x^0(d^*) \right| \le \Delta \,. \tag{8}$$

Оскільки аналітичне визначення оптимального кроку t^* у такій постановці стикається з певними складнощами, будемо визначати t^* та відповідну імовірність $\widetilde{P}^*$ на основі методу статистичного експерименту.

Як відомо, статистичний експеримент – ефективний метод дослідження поведінки об'єкту у випадкових умовах [8]. В результаті комп'ютерного моделювання випадкового процесу можуть бути визначені характеристики об'єкта, аналітична оцінка яких скрутна або неможлива. Для цього проводяться багаторазові іспити з різними значеннями вихідних параметрів та статистичне оброблення отриманих спостережень.

IV. ТЕХНОЛОГІЯ СТАТИСТИЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Статистичний експеримент, що пропонується, грунтується на методі Монте-Карло [9], в основі якого лежить багаторазова генерація масиву X випадкових чисел x_t^0, $t = 1,...,N$ з рівномірним розподілом імовірностей в інтервалі значень $[x_{\min}^0, x_{\max}^0]$. Кожне згенероване число $x_t^0 \in [x_{\min}^0, x_{\max}^0]$ імітує значення суперкритерію альтернативи $d_t \in \{D_1,...,D_N\}$, яку ОПР спостерегіє на t-му кроці.

Загальну схему проведення експериментів ілюструє use-case діаграма в нотаціях універсальної мови моделювання UML (рис. 1).

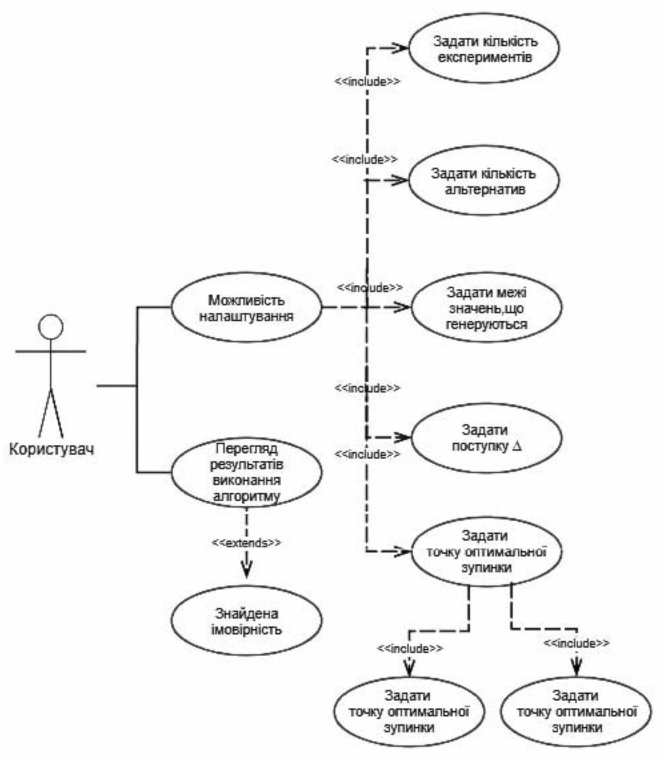

Рис. 1. USE-CASE діаграма

Зрозуміло, що найкраща альтернатива (істинний лідер) d^*, що відповідає максимальному значенню супер критерія $x_{\max}^0$, може зустрітися на довільному місці $t \in [1, N]$ згенерованого масиву X.

Метою експериментів є визначення імовірності успіху при різних $t \in [1, N]$ прийняття остаточного рішення за схемою:

- визначають «умовного» лідера за попередніми значеннями масиву, тобто визначають число

$$x_{1,t}^{\max} = \max\{x_1^0,...,x_t^0\}; \tag{9}$$

- остаточним лідером вважається перша з наступних альтернатив, яку характеризує супер критерій, що перевищує число $x_{1,t}^{\max}$.

Для визначення властивостей модифікованого методу оптимальної зупинки проводиться M статистичних експериментів для кожного фіксованого кроку $t \in [1, N]$ та за кожною серією визначають імовірність вибору альтернативи $\tilde{d}^* \in D$, що задовольняє умову (8).

Імовірність досягнення мети (8) оцінюють частотою

$$P(t) = \frac{m(t)}{M}, \tag{10}$$

де $m(t)$ – число успіхів на t-му кроці в серії з M експериментів.

Для ілюстрації на рис. 2 наведена блок-схема алгоритму.

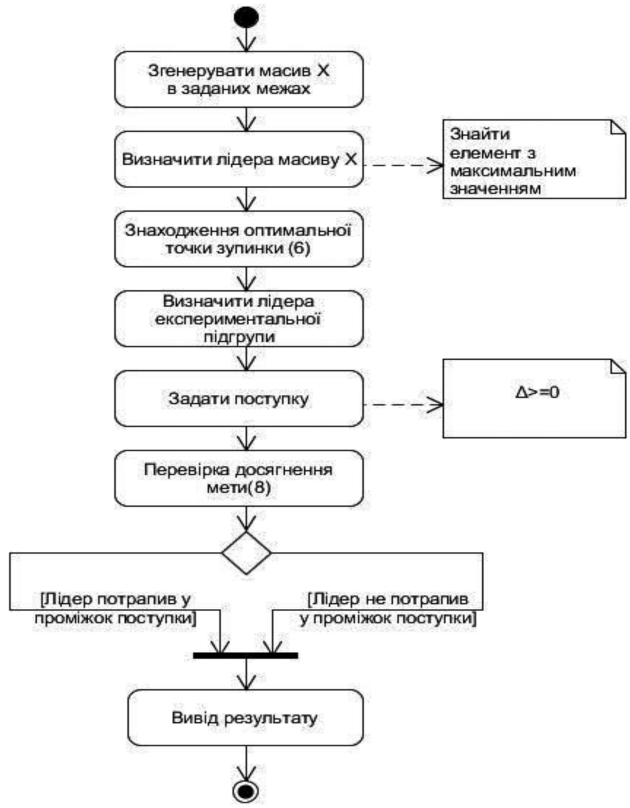

Рис. 2. Блок-схема алгоритму

Таким чином, замість аналітичного визначення властивостей модифікованого методу оптимальної зупинки, можна за допомогою запропонованої системи провести комп'ютерне моделювання процесу прийняття рішень для заданих N та M за рахунок оцінювання імовірності досягнення мети на різних кроках $t \in [1, N]$. В результаті за максимумом обчисленої імовірності визначають оптимальний момент зупинки t^* при різних значеннях поступки $\Delta \geq 0$.

V. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Імовірності $\tilde{P}$ оцінювалась методом Монте-Карло для $N = 100$ альтернатив в серіях з $M = 1000$ експериментів на послідовностях випадкових чисел, що імітували значення суперкритерію.

Графіки залежності оцінок імовірності (9) від кроку t прийняття остаточного рішення при різних значеннях поступки Δ наведені на рис. 3.

Як видно з рис. 3 при збільшенні поступки Δ оптимальний крок $t^* \in [1, N]$, на якому слід приймати остаточний вибір, зменшується, а імовірність $\widetilde{P}$ прийняття правильного рішення збільшується.

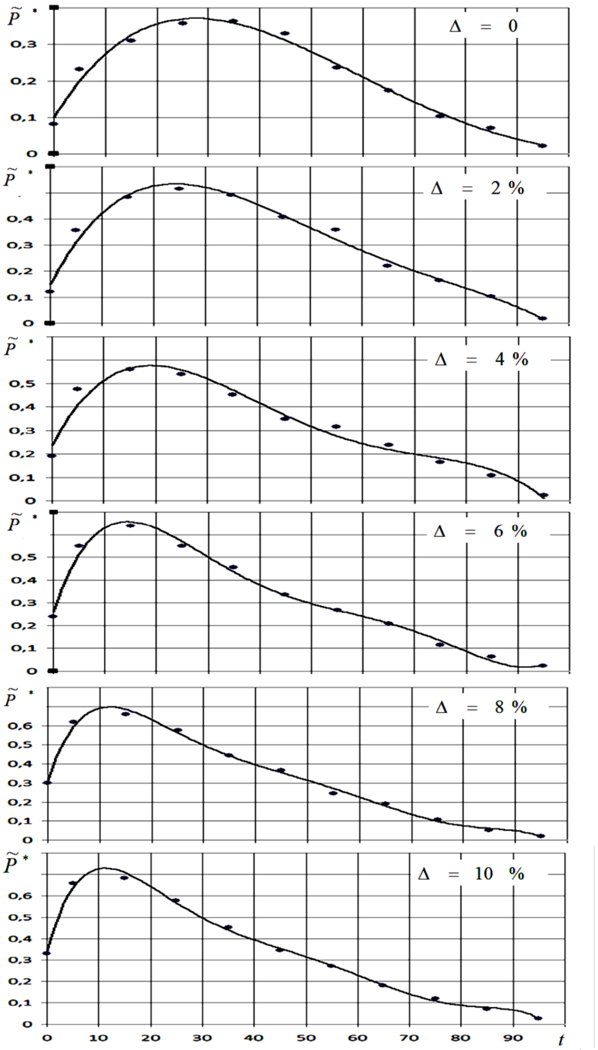

Рис. 3. Залежність імовірності успіху $\widetilde{P}^*$ від кроку t прийняття остаточного рішення при різних поступках Δ

Для ілюстрації на рис. 4 наведено графік залежності імовірності $\widetilde{P}^*$ прийняття остаточного рішення на оптимальному кроці від поступки Δ, а на рис. 5 – графік залежності оптимального кроку від поступки Δ.

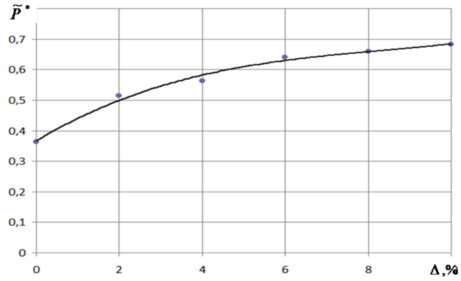

Рис. 4. Залежність імовірності $\widetilde{P}$ від поступки Δ

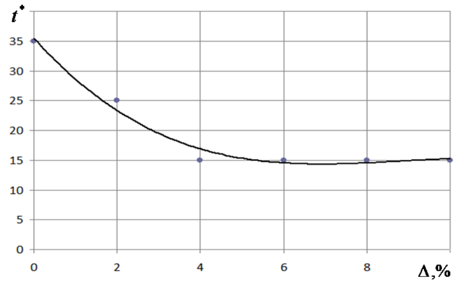

Рис. 5. Залежність оптимального шагу t^* зупинки від поступки Δ

Висновок

За рахунок введення поступки $\Delta > 0$ на значення суперкрітерію, що характеризує найкращу альтернативу, оптимальний крок зупинки зменшується від 37% (класичний метод) до значення 15% від загальної кількості альтернатив вже при значенні поступки $\Delta = 4\%$ (рис. 5). При цьому імовірність $\widetilde{P}$ прийняття правильного рішення збільшується (рис. 4) та досягає 68,3% при поступці $\Delta = 10\%$ у порівнянні з імовірністю $P = 36{,}8\%$ правильного рішення класичного методу оптимальної зупинки, який передбачає відсутність поступки.

Література References

[1] О.А Жуковська, Л.С Файнзільберг, Математичні моделі прийняття колективних рішень. Київ: Освіта України, 2018.

[2] B. Hernendes, (2010). The secretary problem solution details. [Online]. Available: https://thebryanhernandezgame.files.wordpress.com/2010/05/secretary-problem.pdf

[3] T.S. Ferguson, “Who Solved the Secretary Problem?”, Statistical Science, 1989, Vol. 4, No. 3, pp. 282-289

[4] M. Sakaguchi, “Optimal stopping problems for randomly arriving offers”. Math. Japon. 1976, No. 21, pp. 201-217.

[5] С.М. Гусейн-Заде, Разборчивая невеста. – М.: МЦНМО, 2003.

[6] Р.Л. Кини , Х. Райфа, Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М. : Радио и связь, 1981

[7] Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий . М. : Радио и связь, 1993.

[8] R.Y Rubinstein, D.P, Kroese,. Simulation and the Monte Carlo Method New York: John Wiley & Sons; 2016.

[9] C.P. Robert, G. Casella, Monte Carlo statistical methods. New York: Springer; 2004.