Вплив Локального Зміщення Маси на Потенціальне Поле Точкового Заряду у Безмежному Діелектричному Середовищі

Ольга Грицина
відділ математичних методів
обчислювального експерименту,
Центр математичного моделювання
Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України
Львів, Україна
gryt@cmm.lviv.ua, gryt045@gmail.com

Галина Мороз
відділ математичного моделювання
нерівноважних процесів,
Центр математичного моделювання
Інституту прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України
Львів, Україна
halynamoroz.ua@gmail.com

The effect of Local Displacement of Mass on the Potential Field of a Point Charge in an Infinite Dielectric Medium

Olha Hrytsyna
department for mathematical methods
of computing experiment,
Center of Mathematical Modeling of Pidstryhach Institute
for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
National Academy of Sciences of Ukraine
Lviv, Ukraine
gryt045@gmail.com

Halyna Moroz
department for mathematical modelling
of irreversible processes,
Center of Mathematical Modeling of Pidstryhach Institute
for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
National Academy of Sciences of Ukraine
Lviv, Ukraine
halynamoroz.ua@gmail.com

***Анотація*–Співвідношення локально градієнтної теорії діелектриків застосовані для визначення потенціального поля точкового електричного заряду. Показано, що згадана теорія дозволила уникнути сингулярності електричного потенціалу точкового заряду у безмежному діелектричному середовищі, що не вдається досягти у межах класичної теорії діелектриків.**

***Abstract*–In order to determine the potential field of a point electric charge, the relations of the local gradient theory of dielectrics was used. It is shown that, on the contrary to the classical theory of dielectrics, the above theory allows to avoid the singularity of the electric potential of a point charge in an infinite dielectric medium.**

Ключові слова–локально градієнтна теорія, неферомагнітні діелектрики, зв'язані поля, точковий заряд.

Keywords–local gradient theory, nonferromagnetiv dielectrics, coupling fields, point charge.

I. Вступ

Класична теорія діелектриків ґрунтується на локальних визначальних співвідношеннях, які не виконуються в околі вершин тріщин, в ядрах дислокацій, у точках дії зосереджених чинників тощо. Це призвело до сингулярних розв'язків у відповідних крайових задачах математичної фізики. Природно, що така «нефізична» поведінка розв'язків стимулювала вчених до побудови нових узагальнених теорій електромагнітної механіки поляризовних середовищ, які б мали уникнути згадану сингулярність і врахувати неоднорідність стану фізично малих елементів тіл, а також коректно і більш повно описати їх властивості.

У межах континуальної механіки такі теорії будували шляхом:

(*i*) розширення простору параметрів стану градієнтами тензора деформації, вектора поляризації чи вектора напруженості електричного поля (так звані градієнтного типу теорії) [1, 3-7];

(*ii*) постулювання функціональних конститутивних співвідношень (нелокальні теорії) [8];

(*iii*) введення додаткових ступенів вільності – так звані теорії з некласичною кінематикою (полярні, мікрополярні, мікроморфні теорії діелектриків та їх різновиди) [9-11].

Упродовж останніх півтора десятка років зусиллями львівської школи механіків розроблено основи локально градієнтної теорії діелектриків [12]. Ця теорія ґрунтується на врахуванні потоку маси неконвективної та недифузійної природи, зумовленого зміною мікроструктури середовища. Цей потік був пов'язаний з процесом, який отримав назву локального зміщення маси [13]. Результатом урахування локального зміщення маси та його взаємозв'язку з рештою процесів стали нелокальні (градієнтного типу) визначальні співвідношення. Локально градієнтну теорію діелектриків було успішно застосовано для опису приповерхневих, приконтактних і масштабних ефектів, а також низки інших явищ, які не вдавалося обґрунтувати виходячи з рівнянь класичної теорії діелектриків [12].

Покажемо, що локально градієнтна теорія неферомагнітних поляризовних середовищ дозволяє також уникнути сингулярності розв'язків у задачах із зосередженими чинниками. З цією метою співвідношення лінійної теорії діелектриків застосуємо для дослідження потенціального поля точкового електричного заряду.

II. Система рівнянь моделі

Для ізотропних матеріалів лінійна система рівнянь локально градієнтної теорії діелектриків охоплює [12]:

рівняння Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ef}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \tag{2}$$

балансу механічного імпульсу й наведеної маси

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} + \rho_0 \mathbf{F} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \tag{3}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{ms} = 0, \tag{4}$$

визначальні співвідношення для векторів індукцій електричного і магнітного полів

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \rho_0 \boldsymbol{\pi}_e, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \tag{5}$$

нелокальні рівняння стану

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = 2G\hat{e} + \left[\left(K - \frac{2}{3}G - \frac{K^2\alpha_\rho^2}{\rho_0 d_\rho}\right)e - \frac{K\alpha_\rho}{d_\rho}\tilde{\mu}'_\pi\right]\hat{\mathbf{I}}, \tag{6}$$

$$\mu'_\pi = \mu_{\pi 0} + d_\rho \rho_m - \frac{1}{\rho_0} K \alpha_\rho e, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\pi}_m = -\chi_m \nabla \mu'_\pi + \chi_{Em} \mathbf{E}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\pi}_e = \chi_E \mathbf{E} - \chi_{Em} \nabla \mu'_\pi, \tag{9}$$

а також геометричні співвідношення, які пов'язують тензор деформації $\hat{e}$ і вектор переміщення $\mathbf{u}$

$$\hat{e} = \frac{1}{2}\left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right]. \tag{10}$$

Тут $\mathbf{H}$ і $\mathbf{B}$ – вектори напруженості та індукції магнітного поля; $\mathbf{E}$ і $\mathbf{D}$ – вектори напруженості та індукції електричного поля; $\boldsymbol{\pi}_e$ – вектор питомої поляризації; $\mathbf{J}_{ef} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_{ed} + \mathbf{J}_{es}$ – вектор густини повного електричного струму; $\mathbf{J}_e$ – вектор густини електричного струму, пов'язаного з переміщенням вільних зарядів; $\mathbf{J}_{ed} = \varepsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t)$ – струм зміщення; $\mathbf{J}_{es} = \rho_0 \partial \boldsymbol{\pi}_e / \partial t$ – поляризаційний струм; ρ_e – густина вільного електричного заряду; ε_0 і μ_0 – електрична і магнітна сталі; $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор напружень; $e = \hat{e} : \hat{\mathbf{I}}$; $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор; $\mathbf{F}$ – зовнішня масова сила; $\mathbf{J}_{ms}$ – вектор потоку маси недифузійної і неконвективної природи, пов'язаний зі зміною структури фізично малого елемента тіла (локальним зміщенням маси); $\mathbf{J}_{ms} = \rho_0 \partial \boldsymbol{\pi}_m / \partial t$; $\boldsymbol{\pi}_m$ – вектор питомого локального зміщення маси; $\rho_m = -\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_m$ – питома густина наведеної маси; $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$; μ_π – міра зміни внутрішньої енергії системи, зумовленої локальним зміщенням маси; μ – хімічний потенціал; $\mu_{\pi 0}$ і ρ_0 – значення потенціалу μ'_π та густини маси у природному стані безмежного однорідного середовища; K – модуль об'ємного стиску за сталої густини наведеної маси; G – модуль зсуву; α_ρ – коефіцієнт об'ємного розширення, спричиненого локальним зміщенням маси; χ_E — діелектрична сприйнятливість; χ_m і χ_{Em} — коефіцієнти, які характеризують відповідно локальне зміщення маси та поляризовність тіла, зумовлені градієнтом потенціалу μ'_π; d_ρ – ізохоричний коефіцієнт залежності потенціалу μ'_π від питомої густини наведеної маси; t – час; ∇ – оператор Гамільтона; «$\times$» – векторний добуток, крапка означає скалярний добуток [12].

Якщо геометричні співвідношення (10) і рівняння стану (5)-(9) підставити у рівняння Максвелла (1), (2) і балансові рівняння (3), (4), то отримаємо розв'язувальну систему рівнянь локально градієнтної механіки діелектриків, сформульовану відносно векторів переміщення $\mathbf{u}$, напруженості електричного $\mathbf{E}$ та індукції магнітного $\mathbf{B}$ полів, а також модифікованого хімічного потенціалу $\tilde{\mu}'_\pi$. Для стаціонарного наближення ця система рівнянь є такою [12]:

$$\left(\bar{K} + \frac{1}{3}G\right)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + G\Delta \mathbf{u} - K\frac{\alpha_\rho}{d_\rho}\nabla\tilde{\mu}'_\pi + \rho_0 \mathbf{F} = 0, \tag{11}$$

$$\Delta\tilde{\mu}'_\pi - \lambda_{\mu E}^2 \tilde{\mu}'_\pi = \lambda_{\mu E}^2 K \frac{\alpha_\rho}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{u}, \tag{12}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=0\,,\quad \nabla\cdot\mathbf{E}=\kappa_E\Delta\tilde{\mu}'_\pi+\frac{\rho_e}{\varepsilon}\,. \tag{13}$$

Тут

$$\bar{K}=K-\frac{K^2\alpha_\rho^2}{\rho_0 d_\rho}\,,$$

$$\lambda_{\mu E}^2=\frac{1}{d_\rho\left(\chi_m-\kappa_E\chi_{Em}\right)}\,,$$

$$\kappa_E=\frac{\rho_0\chi_{Em}}{\varepsilon}\,,\quad \varepsilon=\varepsilon_0+\rho_0\chi_E\,. \tag{14}$$

Параметр κ_E є параметром взаємозв'язку між електричним полем і локальним зміщенням маси, а $\lambda_{\mu E}$ – масштабний параметр, пов'язаний з урахуванням у модельному описі локального зміщення маси. Такий параметр відсутній у класичній теорії діелектриків. Величина $l_*=\lambda_{\mu E}^{-1}$ має розмірність довжини і є характерною віддаллю для приповерхневих явищ [12].

Зазначимо, що порівняно з класичною теорією електропружності, розв'язувальна система рівнянь (11)-(13) містить одне додаткове рівняння (12), пов'язане з локальним зміщенням маси. Модифікації зазнали також рівняння руху (11) і рівняння електростатики (13), які містять доданки, пов'язані з цим процесом.

Якщо у рівняннях (11)-(13) згідно формул [1]

$$\mathbf{u}=\nabla\varphi_u+\nabla\times\boldsymbol{\psi}_u\,,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{\psi}_u=\mathbf{0}\,,$$

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi_e\,,$$

$$\mathbf{F}=\nabla\Phi+\nabla\times\boldsymbol{\Psi}\,,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{0}\,.$$

перейти до скалярних φ_u, φ_e, Φ і векторних $\boldsymbol{\psi}_u$, $\boldsymbol{\Psi}$ потенціалів векторів переміщення, напруженості електричного поля і масової сили, то для їх визначення отримаємо таку систему рівнянь

$$G\Delta\boldsymbol{\psi}_u+\rho_0\boldsymbol{\Psi}=0\,, \tag{15}$$

$$\left(\bar{K}+\frac{4}{3}G\right)\Delta\varphi_u+\rho_0\Phi=K\frac{\alpha_\rho}{d_\rho}\tilde{\mu}'_\pi\,, \tag{16}$$

$$\Delta\tilde{\mu}'_\pi-\lambda_{\mu E}^2\,\tilde{\mu}'_\pi=\lambda_{\mu E}^2\frac{K\alpha_\rho}{\rho_0}\Delta\varphi_u+\frac{\chi_{Em}}{\varepsilon\left(\chi_m-\kappa_E\chi_{Em}\right)}\rho_e\,, \tag{17}$$

$$\Delta\varphi_e+\kappa_E\Delta\tilde{\mu}'_\pi=-\frac{\rho_e}{\varepsilon}\,. \tag{18}$$

За відсутності дії на тіло масових сил (**F** = 0) на основі рівнянь (16) і (17) для знаходження модифікованого хімічного потенціалу, маємо неоднорідне рівняння Гельмгольца:

$$\Delta\tilde{\mu}'_\pi-\breve{\lambda}^2\,\tilde{\mu}'_\pi=\frac{\chi_{Em}}{\varepsilon\left(\chi_m-\kappa_E\chi_{Em}\right)}\rho_e\,, \tag{19}$$

де

$$\breve{\lambda}^2=\lambda_{\mu E}^2\left(1+M\right)\,,$$

$$M=\left(K+\frac{4}{3}G-\frac{K^2\alpha_\rho^2}{\rho_0 d_\rho}\right)^{-1}\frac{K^2\alpha_\rho^2}{\rho_0 d_\rho}\,.$$

Зазначимо, що M – безрозмірний параметр, який описує взаємозв'язок процесів деформування і локального зміщення маси [12].

Якщо тепер на рівняння (18) подіяти оператором $\mathbf{L}=\Delta-\breve{\lambda}^2$, то для електричного потенціалу одержимо таке диференціальне рівняння четвертого порядку

$$\left(\Delta-\breve{\lambda}^2\right)\Delta\varphi_e=-\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\chi_m}{\chi_m-\kappa_E\chi_{Em}}\Delta\rho_e-\breve{\lambda}^2\rho_e\right). \tag{20}$$

Зазначимо, що у межах класичної теорії діелектриків електричний потенціал підпорядкований неоднорідному рівнянню Лапласа

$$\Delta\varphi_u=-\frac{\rho_e}{\varepsilon}\,. \tag{21}$$

III. Точковий електричний заряд у безмежному діелектричному середовищі

Застосуємо рівняння локально градієнтної теорії діелектриків для вивчення поля електричного потенціалу навколо точкового електричного заряду Q, розташованого у початку системи координат. Приймемо, що Q є сталою величиною.

Функція Гріна для рівняння Гельмгольца (19) має вигляд [2]:

$$\tilde{\mu}'_\pi=-\frac{\chi_{Em}Q}{4\pi\varepsilon\left(\chi_m-\kappa_E\chi_{Em}\right)}\frac{e^{-\breve{\lambda}R}}{R}\,, \tag{22}$$

де $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

За врахування формули (22) на основі рівняння (18) одержимо

$$\varphi_e=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\left(1-\Theta\right)}\frac{e^{-\breve{\lambda}R}}{R}\right), \tag{23}$$

де $\Theta=\dfrac{\chi_m}{\kappa_E\chi_{Em}}$.

Оцінимо величину безрозмірного параметра □ . Врахувавши формули (14), маємо:

$$\Theta=\frac{\varepsilon_0\chi_m\left(1+\chi\right)}{\rho_0\chi_{Em}^2}\,. \tag{24}$$

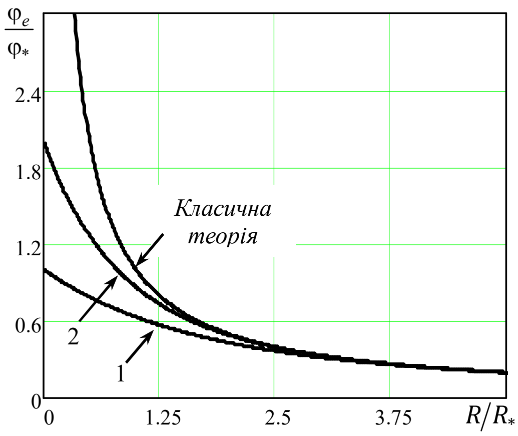

Рис. 1. Нормалізований електричний потенціал φ_e/φ_* точкового електричного потенціалу. Криві 1 і 2 відповідають розподілу електричного потенціалу, обчисленому у межах локально градієнтної теорії діелектриків для різних матеріалів ($\breve{\lambda} = R_*^{-1}$, $2\, R_*^{-1}$)

Оскільки $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м , і для йонних кристалів $\chi_{Em} \sim 10^{-16}$ м^2/ В, $\rho_0 \sim 10^3$ кг / м^2, $\chi_m \sim 10^{-23}$ с$^{-1}$, то, виходячи з формули (24) отримаємо, що $\Theta << 1$, а відтак, приймемо:

$$\varphi_e \approx \frac{Q\left(1-e^{-\breve{\lambda}R}\right)}{4\pi\varepsilon R}.$$

Залежність електричного потенціалу φ_e/φ_* , де $\varphi_* = Q/4\pi\varepsilon$, від безрозмірної координати R/R_* для різних матеріалів ($\breve{\lambda}R_* = 1, 2$) ілюструють криві, наведені на Рис. 1. Зазначимо, що у межах класичної теорії діелектриків потенціал точкового електричного заряду визначається формулою

$$\varphi_e = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R},$$

а відтак є сингулярною функцією у початку системи координат. Бачимо, що локально градієнтна теорія діелектриків, завдяки взаємозв'язку процесів деформування, поляризації і локального зміщення маси, дозволила уникнути згаданої особливості у розподілі електричного потенціалу φ_e . У міру збільшення параметра $\breve{\lambda}$ (характерної віддалі матеріалу [12]), крива, побудована на основі формули (23), наближається до результату класичної теорії.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

[1] В. Новацкий, Электромагнитные эффекты в твердых телах. Москва: Мир, 1984.

[2] Д. Иваненко, А. Соколов, Классическая теория поля. Москва-Ленинград: Изд-во технико-теоретической литературы, 1951.

[3] R. D. Mindlin, "Polarization gradient in elastic dielectrics", *Int. J. Solids and Struct.*, vol. *4*, pp. *637-642*, 1968.

[4] R. D. Mindlin, "Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics", *J. Elast.*, vol. *2*, no. *4*, pp. *217-282*, 1972.

[5] C. B. Kafadar, "Theory of multipoles in classical electromagnetism", *Int. J. Eng. Sci.*, vol. *9*, pp. *831–853*, 1971.

[6] Ж. Можен, Механика электромагнитных сплошных сред. Москва: Мир, 1991.

[7] X. M.Yang, Y. T. Hu, J. S. Yang, "Electric field gradient effects in antiplane problems of polarized ceramics", *Int. J. Solids Struct.*, vol. *41*, pp. *6801–6811*, 2004.

[8] A. C. Eringen, Nonlocal continuum field theories. New York: Springer-Verlag, 2002.

[9] A. C. Eringen, Microcontinuum field theories. 1. Foundation and solids. New York: Springer-Verlag, 1999.

[10] J.Chen, "Micropolar theory of flexoelectricity", *Journal of Advanced Mathematics and Applications*, vol. *1*, pp. *1-6*, 2013.

[11] M. Romeo, "Micromorphic elastic dielectrics: Linear model and micropolar isotropic thin layers", *Int. J. Sol. Struct.*, vol. *49*, pp. *3935–3941*, 2012.

[12] Я. Бурак, В. Кондрат, О. Грицина, Основи локально градієнтної теорії діелектриків. Ужгород: Поліграфцентр Ліра, 2011.

[13] Я. Й. Бурак, "Визначальні співвідношення локально-градієнтної термомеханіки", *Доп. АН УРСР*, *Сер. А.*, № 12, с. *19-23*, 1987.