Спектральні Методи в Прикладних Задачах

Ярослав П’янило
Відділ математичних методів обчислювального експерименту Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
Львів, Україна
danylo794@gmail.com

Олег Браташ
Відділ математичних методів обчислювального експерименту Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
Львів, Україна
olebra31@gmail.com

Галина П’янило
Відділ математичних методів обчислювального експерименту Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
Львів, Україна
danylo794@gmail.com

Spectral Methods in Applied Problems

Yaroslav Pyanylo
Department for Mathematical Methods of Computing Experiment in Center of Mathematical Modeling of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine
Lviv, Ukraine
danylo794@gmail.com

Oleh Bratash
Department for Mathematical Methods of Computing Experiment in Center of Mathematical Modeling of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine
Lviv, Ukraine
olebra31@gmail.com

Halyna Pyanylo
Department for Mathematical Methods of Computing Experiment in Center of Mathematical Modeling of Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine
Lviv, Ukraine
danylo794@gmail.com

***Анотація*—Запропоновано метод розв’язування диференціальних рівнянь у дробових похідних за часом із використанням многочленів Лагерра. Розв’язок визначено з трикутної системи диференціальних рівнянь у звичайних або частинних похідних за координатами. Отримані результати апробовано на модельній задачі.**

***Abstract*—The method for solving differential equations in fractional time derivatives using Laguerre polynomials is proposed. The solution is found from triangular system of differential equations in ordinary or partial coordinate derivatives. The obtained results are tested on the model problem.**

Ключові слова—диференціальні рівняння; дробові похідні; многочлени Лаггера.

Keywords—differential equations; fractional derivatives; Laguerre polynomials.

I. Вступ

Математичне моделювання природних процесів базується, як правило, на заміряних даних. При цьому дані можуть бути в довільних точках і з невисокою точністю. Тому для використання цих даних при вирішенні задач математичної фізики необхідна їх попередня обробка. Оброблення даних може проходити в декілька етапів: візуальна обробка, фільтрація отриманої інформації, апроксимація. Адитивні шуми відфільтровуються, в основному, апроксимацією сигналів. Фільтрація мультиплікативних шумів зводиться до вирішення інтегральних рівнянь типу згортки, лінійної або нелінійної. Для оброблення сигналів використовують спектральні методи. До недавнього часу використовувались ортогональні базиси, в яких побудовані швидкі перетворення. Це було пов'язано, в основному, з малою швидкодією обчислювальної техніки. Аналіз цих базисів показав, що вони не всі задовольняють вимоги, які перед ними ставляться. Тому для оброблення цифрової інформації почали використовувати інші відомі базиси або будувати нові.

Спектральні методи дають можливість розв'язувати задачі в тому випадку, коли функції, що входять в математичну модель опису фізичного процесу, зображаються збіжними рядами за даним базисом. Серед спектральних базисів заслуговують на увагу базиси многочленів Якобі $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ та Чебишева-Лагерра $L_n^{\lambda}(t)$, де $\alpha > -1, \beta > -1$ – вільні параметри, n – порядок многочлена, $(\lambda > -1, t \in [0,\infty))$. В теорії ортогональних рядів відомі теореми, в яких сформульовано умови збіжності.

Спектральні методи розв'язування задач зводяться до обчислення узагальнених $f_n\ (n = 0,\cdots,\infty)$ спектрів, а способи їх обчислення залежать від виду вхідної інформації. Якщо апроксимуюча функція $f(t)-$ задається аналітично, то мають місце параметричні зображення узагальнених спектрів.

При заданні вхідних значень в дискретній формі, тобто відомі значення $f(x_j),\ j = \overline{1,N}$, для знаходження узагальнених спектрів можна використати квадратурні формули для обчислення відповідних інтегральних представлень, метод найменших квадратів або ж інші способи. В деяких випадках у залежності від вхідної інформації можна вказати оптимальні в класі L_2 формули для обчислення узагальнених спектрів.

Нехай многочлени $u_n(x)$ ортогональні на проміжку $[a,b]$ і функція $\varphi(x)$ подається ортогональним рядом за даними многочленами

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{r_n} u_n(x). \tag{1}$$

Відомо [1], що $N+1$–ий ортогональний многочлен має $N+1$ дійсний корінь, який належить до проміжку ортогональності. Тоді для обчислення узагальнених спектрів φ_n має місце оптимальна в L_2 квадратурна формула [2]

$$\varphi_n = \sum_{j=0}^{N} \rho_j^2\, u_n(x_j)\, \varphi(x_j), \tag{2}$$

де x_j - корені рівняння $u_{N+1}(x_j) = 0$, а

$$\rho_j^{-2} = \sum_{i=0}^{N} u_i^2(x_j). \tag{3}$$

II. Згладження (усереднення) та ідентифікація сигналів

Задано значення функції $F(t)$ в точках t_i. За означенням усереднення функції на проміжку $t \in [0,l]$ задається формулою

$$F_c = \frac{1}{l}\int_0^l F(t)dt\,. \tag{4}$$

III. Апроксимація сигналів в базисі многочленів Чебишева-Лагерра

Вибір виду апроксимації функції $f(t)$ відповідним рядом доцільно проводити на основі апріорної інформації. Многочлени Чебишева-Лагерра мають той істотний недолік, що при великих n їхня поведінка наступна [1]

$$L_n^{\lambda}(t) = O\left(e^{t/2}\, t^{-(2\lambda+1)/4}\, n^{(2\lambda-1)/4}\right).$$

Ця властивість многочленів Чебишева-Лагерра значно звужує клас задач, в яких використовується ортогональне перетворення, оскільки виникають обчислювальні труднощі при сумуванні відповідного ряду для великих t. На практиці ця проблема розв'язується введенням масштабного множника. Однак зміна масштабного множника вимагає повторного розв'язку задачі й приводить до нестійкості в обчисленні оригіналу $f(t)$. Тому перетворення Чебишева-Лагерра узагальнено наступним чином [2].

Нехай

$$f_n = \int_0^{\infty} t^{\nu\lambda+\nu-1}\, e^{-\mu t^{\nu}}\, L_n^{\lambda}(\mu t^{\nu})\, f(t)\, dt, \tag{5}$$

де $\mu > 0$, $|\nu| < \infty$, $\nu \neq 0$. Тоді $f(t)$ буде обчислюватися за формулою

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! f_n}{\Gamma(n+\lambda+1)} L_n^{\lambda}(\mu t^{\nu}). \tag{6}$$

Слід відзначити, що поряд з використанням узагальнених многочленів Чебишева-Лагерра можна застосовувати спектральний розклад в базисі функцій Лагерра

$$\varphi_n(t) = e^{-t/2}\, L_n^{\lambda}(t), \qquad \lambda > -1, \tag{7}$$

що є ортогональними на проміжку $[0,\infty)$ і зберігають всі основні властивості многочленів Чебишева-Лагерра. При $n \to \infty$ і $t \to \infty$ функції Лагерра $\varphi_n(t)$ прямують до нуля.

Нехай функція $f(t)$ апроксимується частковою сумою ряду

$$f(t)=t^{\lambda}\, e^{\gamma\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{r_n}\, \varphi_n(t/h), \tag{8}$$

де $\gamma(|\gamma|<\infty)$ та $h(0<h<\infty)$ – деякі сталі, r_n – нормуючий множник. Тоді для обчислення коефіцієнтів f_n мають місце формули

$$\begin{aligned} f_n &= \int_0^{\infty} e^{-\gamma h\tau}\, f(h\tau)\, \varphi_n(\tau)\, d\tau, \\ f_n &\approx \sum_{m=0}^{N} \frac{\lambda_m\, e^{-\gamma h\lambda_m}\, f(h\lambda_m)}{[(N+2)\varphi_{N+2}(\lambda_m)]^2}\, \varphi_n(\lambda_m). \end{aligned} \tag{9}$$

В останній формулі λ_m є коренем функції $\varphi_{N+1}(\tau)$. З формули (7) випливає, що корені функції Лагерра $\varphi_n(t)$ на проміжку ортогональності співпадають з коренями многочленів Чебишева-Лагерра.

IV. Побудова початково-граничних умов при математичному моделюванні фізичних процесів дифузії газу в неоднорідних пористих середовищах

Фізичні процеси в реальних тілах, як правило, описуються диференціальними рівняннями (системами диференціальних рівнянь) в часткових похідних [3-5]. Причому існуючі методи розв'язування поставлених на їх основі задач математичної фізики вимагають аналітичного вигляду початково-граничних умов. Разом з тим на практиці, зокрема при моделюванні процесів переносу частин природного середовища, існуючі способи експериментального збору інформації вимірювання дають можливість отримувати дані про розподіл шуканих величин (температури, вологості, тиску газу, тощо) у дискретному вигляді з невисокою точністю в нерівновіддалених точках. Тому першим етапом дослідження відповідних математичних моделей процесів переносу є побудова вхідної інформації в параметричній формі.

V. Фільтрація мультиплікативних шумів

Багато прикладних задач (зокрема обробки інформації, лідарні рівняння і т.п.) зводяться до інтегральних рівнянь типу згортки. При цьому вхіді дані задаються в дискретному виді. Це вимагає використання числових методів розв'язування цих рівнянь. Існує два основних підходи до числового розв'язування інтегральних рівнянь І-го роду типу згортки: використання регуляризуючих алгоритмів тихоновського типу або апроксимація безпосередньо вихідного рівняння. Обидва ці методи не позбавлені деяких недоліків [3].

Використання алгоритмів тихоновського типу призводить до втрати вольтерровості, що значно знижує можливість відновлення шуканих функцій для розглядуваних областей їх застосування і застосування малих кроків сітки.

Головним недоліком другого напрямку є відсутність обліку нестійкості числового розв'язку до похибок вхідної інформації, що виводить розв'язок збуреного рівняння за межі множини коректності. Крім того, не всі квадратурні формули породжують збіжні методи. Побудовано алгоритми розв'язання інтегральних рівнянь

$$\alpha f(t) + \mu \int_0^t k'(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau = y(t), \tag{10}$$

$$\mu \int_0^t k(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau = y(t). \tag{11}$$

в базисі Чебишева-Лагерра $L_n^{\lambda}(t)$, $\lambda > -1$. Тут α, μ - деякі сталі, $f(t)$ - шукана функція, $k(t)$ - ядро рівняння. Вважається, що функції, які входять в інтегральні рівняння (10) і (11) задовольняють умови, що дозволяють зобразити їх рядами Фур'є-Лагерра. Відновлення шуканого розв'язку зводиться до визначення невідомих коефіцієнтів f_n. Зокрема, якщо функції, що входять в рівність (10), подати у вигляді рядів Фур'є-Лагерра, то формула для визначення невідомих коефіцієнтів буде мати вигляд

$$f_n = \frac{1}{\alpha + \mu\left(k_0 - k(0)\right)} \left(y_n - \mu \sum_{m=1}^{n} k_m\, f_{n-m} \right). \tag{12}$$

Аналогічна формула отримується і для невідомих коефіцієнтів в рівнянні (11). Тут k_m та f_m - коефіцієнти Фур'є-Лагерра функцій $k(t)$ і $f(t)$. Оскільки коефіцієнти k_n та y_n можна вважати відомими, то за формулою (12) визначається лагеррівський спектр невідомої функції $f(t)$. Таким чином рівняння (10) можна вважати розв'язаним.

VI. Похідні дробових порядків в прикладних задачах

Під час моделювання багатьох фізичних процесів, зокрема, фільтрації речовини в складному пористому середовищі, необхідно враховувати історію процесу. Математичне моделювання фізичних процесів зводиться, зазвичай, до побудови диференціальних рівнянь (або їх систем) у частинних похідних і формулювання відповідних задач математичної фізики. Моделі такого роду не враховують історії процесу. Тому для дослідження таких процесів все частіше використовується дробове (диференціальне й інтегральне) числення [6, 7]. Аналітичні методи розв'язування задач, які виникають, зазвичай, будуються на базі операційного перетворення Лапласа. Наявні таблиці відповідності між оригіналами та зображеннями або використання контурного інтегрування не завжди приводить до необхідного результату. Використання наближених методів обернення не може гарантувати необхідної точності відновлення оригіналу. Одним із підходів для уникнення цієї проблеми є застосування спектрального методу в базисі многочленів Лагерра до розв'язування задач дробового числення.

У літературі введено декілька видів дробових похідних та інтегралів. Найбільш вживаними є дробові похідні в термінах Капуто та Рімана-Ліувілля. Оператор дробової похідної у термінах Капуто визначається так [8]:

$$ {}^{c}D_{\tau}^{\alpha}=\frac{{}^{c}\partial^{\alpha}}{\partial\tau^{\alpha}}\varphi(\tau):=\frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)}\int_{0}^{\tau}\left(\frac{\partial^{m+1}}{\partial\xi^{m+1}}\varphi(\xi)\right)\Big/(\tau-\xi)^{\alpha-m}d\xi \quad (13)$$

де $m=[\alpha]$, $[\cdot]$ — ціла частина дійсного числа, а в термінах Рімманна-Ліувілля —

$$D_{t}^{\alpha}=\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}\varphi(t):=\frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)}\frac{\partial^{m+1}}{\partial\xi^{m+1}}\int_{0}^{t}\frac{\varphi(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-m}}d\xi\ .(14)\quad (2)$$

Однією із задач, де застосування дробових похідних є ефективним, виступає моделювання процесу роботи складних газотранспортних систем, зокрема, фільтрація газу в пористому середовищі. Остання у термінах дробової похідної Рімана-Ліувілля за часовою змінною описується рівнянням [9]

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^{2}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^{2}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{kh}{\mu\chi}\frac{\partial p^{2}}{\partial z}\right)=\\&=2mh\left(\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}\left(\frac{p}{\chi}\right)+2qp_{at}\right)\end{aligned}\ . \quad (15)$$

Тут α — степінь дробової похідної; $k=k(x,y,z,t)$, $m=m(x,y,z)$ та $h=h(x,y,z)$ — коефіцієнти проникності, пористості та товщина середовища відповідно; μ — динамічна в'язкість речовини, p_{at} — атмосферний тиск, q — густина відбору, χ — коефіцієнт стисливості газу, для обчислення якого побудовано значну кількість емпіричних формул на основі експериментальних даних, зокрема,

$$\chi=1/(1+fp)\ . \quad (16)$$

Тут $f=\left(24-0,21t^{o}\mathrm{C}\right)\cdot 10^{4}$, а $p(x,y,z,t)$ вимірюється в атмосферах.

Задача полягає у знаходженні розв'язку $p(x,y,z,t)$ рівняння (15) за відомими значеннями тиску $p(x_i,y_i,z_i,t_0)$ у заданих точках середовища й умовою непроникності на контурі середовища.

1. Аналітичний спосіб вирішення задач математичної фізики за наявності похідних дробових порядків базується на інтегральному перетворенні Лапласа. Якщо $\Im$ оператор перетворення Лапласа-Карсона, то має місце рівність $\Im\left(D_{a+}^{\alpha}f(t)\right)==s^{\alpha}\left[F(s)-f(0)\right]$, де $F(s)$ - зображення Лапласа-Карсона оригіналу $f(t)$. Для знаходження оригіналів зображень з параметром перетворення s^{α} можна використати теорему Ефроса або функції Міттаг-Леффлера.

2. Основним числовим методом є схема Грюнвальда-Летнікова.

$${}^{GL}D_{\tau}^{\alpha}p:=\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t)^{-\alpha}\sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]}(-1)^{j}\binom{\alpha}{j}p(\tau-j\Delta t)$$

Оператор Грювальда-Летнікова (11) апроксимується на проміжку $[0,\tau]$ з підінтервальним кроком Δt як

$${}^{GL}D_{\tau}^{\alpha}p(\tau)\approx\sum_{j=0}^{[\tau/\Delta t]}c_{j}^{(\alpha)}p(\tau-j\Delta t),\ c_{j}^{(\alpha)}=(\Delta t)^{-\alpha}(-1)^{j}\binom{\alpha}{j}.$$

Коефіцієнти $c_j^{(\alpha)}$ обчислюються на базі рекурентного співвідношення $c_j^{(\alpha)}=(\Delta t)^{-\alpha}$, $c_j^{(\alpha)}=\left[1-(1+\alpha)/j\right]c_{j-1}^{(\alpha)}$. Для $j=1$ маємо $c_1^{(\alpha)}=-\alpha(\Delta t)^{-\alpha}$.

До інших методів можна віднести застосування квадратурних формул, метод скінченних різниць та скінчених елементів, тощо.

VII. Застосування многочленів Чебишева-Лагерра до лінеаризованого рівняння

Оскільки в природі пористі середовища є невеликої потужності, то фільтрацією в вертикальному напрямі можна знехтувати. Рішення задачі будемо шукати у вигляді ряду

$$p(x,y,t)=t^{\lambda_k+\lambda_p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,p_n(x,y)}{\Gamma(n+\lambda_p+1)}L_n^{\lambda_k+\lambda_p}(t)\,. \quad (17)$$

Тоді для знаходження коефіцієнтів $p_n(x,y)$ отримується система диференціальних рівнянь відносно $p_n(x,y)$.

Література References

[1] Я.Д.П'янило, В.Г.Собко Побудова та дослідження біортогональних поліномів на базі многочленів чебишева . – Прикл. проблеми мех.. і мат. – 2013.-Вип. 11.- С. 181-189.

[2] Ярослав П'янило, Марія Васюник, Іван Васюник Використання многочленів Лагерра до спектрального методу розв'язування рівнянь у дробових похідних за часом // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – Вип.17. – С. 163-167.

[3] Нахушева В. А. Некоторые классы дифференциальных уравнений математических моделей нелокальных физических процессов. — Нальчик: КБНЦ РАН, 2002. — 100 с.

[4] Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. — Москва: Высшая школа, 1975. — 407 с.

[5] Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. — Москва: Высшая школа, 1965. — 466 с.

[6] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

[7] Васильев В. В., Симак Л. А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. — Киев: Научное издание НАН Украины, 2008 — 256 с.

[8] Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — Научно-исследовательский ин-т приклад, математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН. — Москва: Наука, 2005. — 199 с.

[9] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — Москва: Физматлит, 2003. — 272 с.