

# Застосування Математичних Методів до Контролю Технічного Стану Об'єктів Нафтогазового Комплексу та Стану Довкілля

Андрій Олійник  
кафедра математичних методів в інженерії  
ІФНТУНГ  
Івано-Франківськ, Україна  
andrij-olijnyk@rambler.ru

## Application of Mathematical Methods to Condition Monitoring Oil and Gas Facility Environment and State

Andrij Olijnyk  
department of mathematical methods in engineering  
IFNTUOG  
Ivano-Frankivsk, Ukraine  
andrij-olijnyk@rambler.ru

**Анотація**—Запропоновано комплексну математичну модель оцінки технічного стану трубопроводів та ризиків при виникненні аварійних ситуацій. Вона передбачає оцінку зміни напруженого стану, швидкості витоку речовин при розгерметизації трубопроводу та поширення їх в довкілля. Всі моделі реалізовані на ПЕОМ, проведено широкий клас розрахунків.

**Abstract**—The complex mathematical model has been designed to estimate pipeline's technical state both with the accidents appearance risks. It allows to estimate the stress state changing, the velocity of liquid leaks during the pipeline depressurization and one's distribution in the environment. All the models are realized as computer codes, the wide class of calculations have been made.

**Ключові слова** — модель, напружений стан, малі витоки, фільтрація, дифузія.

**Keywords** — model, stress state, low leaks, filtration, diffusion.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Проблема, що вирішується може бути розділена на три основні задачі:

1. Визначення параметрів напружено-деформованого стану досліджуваних об'єктів за відомою інформацією про зміну їх просторової конфігурації – як правило, такою інформацією є дані про переміщення точок поверхні досліджуваного тіла, на основі якої вдається побудувати

математичне подання [3] радіус-вектор будь якої точки цього тіла в контрольні моменти часу. Для об'єктів, що мають циліндричну форму (трубопроводи різного призначення, свердловини з газорідними потоками тощо), вказане подання може бути записане у вигляді:

$$\vec{r}(s, \varphi, r, t) = \vec{r}_l(S, \varphi, r, t) + \rho(S, \varphi, r, t)(\cos \omega(S, \varphi, r, t)\vec{b}_l + \sin \omega(S, \varphi, r, t)\vec{n}_l) + \psi(S, \varphi, r, t)\vec{\tau}_l - \frac{D}{2}\vec{n}_l \quad (1)$$

де  $s, \varphi, v, t$  – пов'язані з криволінійним циліндричним тілом координати відповідно вздовж осі тіла  $0 < S < L$ , по полярному куту  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  та по радіусу об'єкта  $R_{\text{внут}} \leq r \leq R_{\text{зовн}}$ ,  $L$  – довжина досліджуваного об'єкта;  $\vec{r}_l$  – радіус вектор точки на твірній об'єкта;  $D$  – його діаметр;  $\rho(s, \varphi, v, t)$ ;  $\omega(s, \varphi, v, t)$ ;  $\psi(s, \varphi, v, t)$  – функції, що характеризують переміщення точок досліджуваного тіла відповідно в радіальному, полярному та повздовжньому напрямках,  $\vec{\tau}_l, \vec{b}_l, \vec{n}_l$  – вектори дотичної, бінормалі та нормалі до твірної об'єкта.

Задання функції  $\rho(s, \varphi, v, t)$ ; та  $\psi(s, \varphi, v, t)$  на основі даних про переміщення точок поверхні

дозволяє в контрольний момент часу провести розрахунки компонент тензорів деформацій  $\varepsilon_j^i$ ,

$$\varepsilon_{ij}(s, \varphi, v, t_k) = \frac{1}{2}(g_{ij}(s, \varphi, v, t_k) - g_{ij}(s, \varphi, v, t_0)), \quad (2)$$

де  $g_{ij}$  – компоненти матричного тензора, побудовані за (1) [4], а також компоненти тензора напружень – у випадку, коли деформації вважаються пружними, перерахунок вказаних компонент проводиться за законом Гука:

для ізотропного тіла (з використання (2)):

$$\sigma_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon)g_{ij}(s, \varphi, v, t_0) + 2\mu\varepsilon_{ij}(s, \varphi, v, t), \quad (3)$$

де  $I_1(\varepsilon) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij}(s, \varphi, v, t)g_{ij}(s, \varphi, v, t_0)$  – перший інваріант

тензора деформацій;  $\lambda, \mu$  – параметри Ламе матеріалу [5], які пов’язані з модулем Юнга  $E$  та коефіцієнтом Пуассона  $\sigma$  матеріалу співвідношеннями:

$$\mu = \frac{E}{2(\sigma + 1)}; \lambda = \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}; \quad (4)$$

2. Оцінка інтенсивності витoku речовини при порушенні герметичності об’єкта.

Задача оцінки параметрів течії у трубопроводах та в свердловинних потоках зводиться до необхідності розв’язання системи рівнянь Нав’є-Стокса [6] в двовимірній постановці:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + y \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + y, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

з умовами:  $p = p_0 - kx$ ;  $k$  – коефіцієнт перепаду тиску;

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= -\frac{ky^2}{4\mu} + \frac{kRy}{2\mu} \\ u|_{y=0} &= u|_{y=2R} = 0 \\ v|_{x=0} &= v|_{y=0} = 0 \\ v|_{y=2R} &= \begin{cases} 0, & x \leq x_1; x \geq x_2 \\ \pm v_{\text{внт}}, & x \in [x_1, x_2] \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

граничні умови виду (6) дозволяють враховувати як можливі витoki, так і втoki рідини.

Розроблено чисельний метод розв’язання системи (5); (6), доведено його збіжність і стійкість, побудовано та реалізовано розрахунковий алгоритм, виявлено оптимальні

параметри розрахункової сітки. Це дозволяє моделювати поля швидкостей при заданій величині  $V_{\text{внт}}$ , що не завжди можна визначити практично. Тому для розв’язання системи (5) застосовується методика [6], яка дозволяє звести систему (5) до рівняння Пуассона:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (7)$$

Існують методики розв’язання системи (5), проте, використовуючи результати [7], можна зробити висновок, що

$$\left| 2\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right| \ll 1, \quad (8)$$

і, з урахуванням (8), можна запропонувати наступний алгоритм розв’язання:

2.1 На першому кроці розв’язується рівняння (7) з граничними умовами:

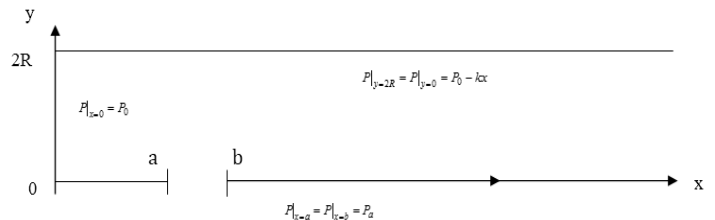


Рис. 7. Граничні умови для рівняння Лапласа (Задача Діріхле)

При цьому використовується метод поверхневої релаксації [6].

2.2 Розв’язується система (5) з умовам (6), причому  $V_{\text{внт}}$  визначається за знайденими  $P(x, y, t)$  за законом Дарсі:

$$\begin{cases} u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \\ v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{kg\rho}{\mu} \end{cases} \quad (9)$$

$k$  – проникність середовища;  $\mu$  – динамічна в’язкість рідини.

2.3 За знайденим розподілом швидкостей рівняння (7) розв’язується з заново перерахованою правою частиною. Процедура повторюється до тих пір, доки розв’язок не збіжиться.

3. Визначення концентрації шкідливих речовин в зоні аварійної ситуації.

Для оцінки концентрації шкідливих речовин розв’язується рівняння дифузії, яке для двовимірної області записується у вигляді:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x, y, t) \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a(x, y, t) \frac{\partial C}{\partial y} \right). \quad (10)$$

Коефіцієнт  $a(x, y, t)$  є коефіцієнтом дифузії, який залежить від просторових координат  $x, y$  та часу  $t$ . Рівняння (10) доповнюється граничними та початковими умовами [8]:

$$C_0(x, y) = C_0(x, y, 0), \quad (11)$$

$$\begin{cases} C|_{x=0} = C_1(y, t) \\ C|_{x=L_1} = C_2(y, t) \\ C|_{y=0} = C_3(x, t) \\ C|_{y=L_2} = C_4(x, t) \end{cases} \quad (12)$$

При визначенні аналітичної структури  $C_i(x, t); C_j(y, t)$ ,  $j=1, 2$  використовуються результати розрахунків п.п.1.2 в допущенні про пропорційність концентрації речовини на границі області швидкості витікання речовини.

## II. РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ

Розроблені математичні моделі реалізовано у вигляді обчислювальних алгоритмів. На рис.2 зображено потенційно небезпечні ділянки досліджуваного об'єкту (трубопроводу, обв'язки свердловини) з точки зору зміни напружено-деформованого стану та можливого порушення герметичності. Це дозволяє оцінити геометричне розташування можливих дефектів та їх інтенсивність, яку характеризує ширина зони практичних напружень.

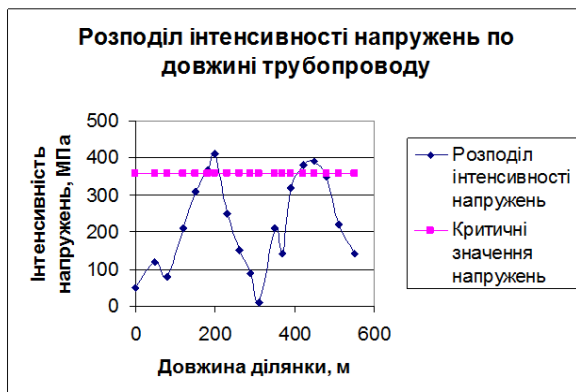


Рис. 8. Розподіл інтенсивності напружень по довжині трубопроводу

На рис.3 наведено розподіл тиску в трубопровідній системі при порушенні її герметичності в залежності від величини зони прориву. Вказана картина спостерігається при порушенні герметичності підземної ділянки при надземному прориві через значний градієнт тиску аварійна ситуація розвивається з катастрофічною швидкістю.

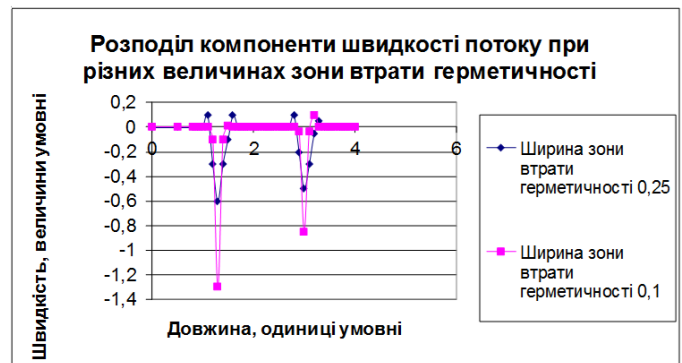


Рис. 9. Розподіл компоненти швидкості потоку при різних величинах зони втрати герметичності

## ВИСНОВОК

В ході проведених досліджень одержано наступні результати:

Розроблено методику виявлення потенційно небезпечних ділянок з точки зору зміни напружено-деформованого стану та можливої втрати геометричності об'єктів за відомими переміщеннями певної множини точок поверхні, яка дозволяє досліджувати як надземні, так і підземні ділянки трубопроводів, а також підземні свердловинні колони труб. Розроблено математичну модель течії в'язкої рідини в трубопровідній системі за наявності витоків або витікання рідини через поверхню на основі чисельного інтегрування системи рівнянь Нав'є-Стокса. Встановлено спосіб визначення швидкості витoku рідини при втраті герметичності в залежності від величини зони витoku. Розроблено математичну модель процесу дифузії шкідливих речовин з визначеними за допомогою моделей 1, 2 граничними умовами. Всі розроблені моделі доведені до чисельної реалізації. Напрямами подальших досліджень можуть бути пов'язані з розробкою методики визначення величини  $a(x, y, t)$  та їх розподілу в просторі, що суттєво полегшує задачу оцінки зони шкідливих впливів.

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Неразрушающий контроль и диагностика. Справочник/ В.В. Клюев, Р.Ф. Соснин и др. – 2-е изд. – М.: Машиностроение, 2003 – 656 с.
- [2] Мазур И.И. Безопасность трубопроводных систем/ И.И. Мазур, О.М. Иванцов – М.:ИЦ «Елима», 2004 – 1104 с.
- [3] Олійник А.П. Математичні моделі процесу квазістаціонарного деформування трубопровідних та промислових систем при зміні їх просторової конфігурації: Наукове видання / А.П. Олійник – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2010 – 320с.
- [4] Седов Л.И. Механика сплошных сред– М.: Наука, 1984 – 572с.
- [5] Заміховський Л.М. Математичний апарат для контролю напружено-деформованого стану трубопроводів при зміні їх просторового положення /А.П. Олійник .: ІФНТУНГ, 2008 – 306 с.
- [6] Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Теннехилл, Р. Плетчер –. – М.: Мир, 1990 – 776 с.
- [7] Modelling of fluid flow in pipeline with the leaks due to surface/ A.P. Olijnyk, L.O. Shtayer / - Journal of Hydrocarbon Power Engineering, 2014, Vol 1, Issue 1 – pp. 45-52.
- [8] Олійник А.П. Математичне моделювання процесів забруднення ґрунтів як результату технологічних процесів - / А.П. Олійник, А.А. Мороз – Матеріали МНТК «Фундаментальні та прикладні проблеми сучасних технологій» - Тернопіль, 2015 – ст.22-24