

# Системний Аналіз Впливу форми Включення на його Пластичне Відшаровування в Умовах Антиплоскої Деформації

Василь Кривень

кафедра математичних методів в інженерії  
Тернопільський національний технічний  
університет імені Івана Пулюя  
Тернопіль, Україна  
kryvenv@gmail.com

Володимир Валяшек

кафедра математичних методів в інженерії  
Тернопільський національний технічний  
університет імені Івана Пулюя  
Тернопіль, Україна  
valiashek@gmail.com

Цимбалюк Любов

кафедра математичних методів в інженерії  
Тернопільський національний технічний  
університет імені Івана Пулюя  
Тернопіль, Україна  
lubovtsymbaliuk@gmail.com

Наталія Блащак

кафедра математичних методів в інженерії  
Тернопільський національний технічний  
університет імені Івана Пулюя  
Тернопіль, Україна  
nblashchak@gmail.com

## Systematic Analysis of the Inclusion Shape Influence on its Plastic Exfoliation Under the Conditions of Anti-Plane Deformation

Vasyl Kryven

Department of Mathematical Methods in Engineering  
Ternopil Ivan Puluj National Technical University  
Ternopil, Ukraine  
kryvenv@gmail.com

Volodymyr Valiashek

Department of Mathematical Methods in Engineering  
Ternopil Ivan Puluj National Technical University  
Ternopil, Ukraine  
valiashek@gmail.com

Lubov Tsymbaliuk

Department of Mathematical Methods in Engineering  
Ternopil Ivan Puluj National Technical University  
Ternopil, Ukraine  
lubovtsymbaliuk@gmail.com

Natalia Blashchak

Department of Mathematical Methods in Engineering  
Ternopil Ivan Puluj National Technical University  
Ternopil, Ukraine  
nblashchak@gmail.com

*Анотація*—Досліджується вплив форми жорсткого включення на його пластичне відшаровування в умовах антиплоскої деформації. Матеріал основного середовища – ідеально пружно-пластичний. Знайдено чисельно-аналітичний розв’язок задачі про квазістатичне пластичне відшаровування жорсткого включення, обмеженого двома циліндричними поверхнями однакової кривини, що перетинаються під довільним кутом. Пластичні деформації локалізовані на межі включення-середовище і розвиваються від вершин включення вздовж поверхонь, попередньо

адгезійно зв’язаних із середовищем. Умови пластичності досягаються тільки в смугах міжфазного відшаровування. Визначено функцію напружень, знайдено залежності довжин міжфазних пластичних смуг від величини навантаження. Проведено порівняння відшаровування такого включення з відшаровуванням ромбічного з таким же кутом про одній парі протилежних вершин. Проаналізовано вплив форми включення на розміри відшарованої поверхні.

**Abstract**—The influence of the shape of a rigid inclusion on its plastic exfoliation under anti-plane deformation conditions was studied. It is assumed that the material of the main environment is perfectly elastic-plastic. The problem of exfoliation of an inclusion bounded on the sides by two cylindrical surfaces of the same curvature intersecting at an arbitrary angle is solved. Plastic deformations are localized at the inclusion-surrounding boundary and develop from inclusion peaks along surfaces previously adhesively connected to the environment. The conditions of plasticity are achieved only in the bands of interphase delamination. The stress function was determined and the dependence of the lengths of the interfacial plastic bands on the load value was established. The exfoliation of the studied inclusion is compared with the exfoliation of a rhombic inclusion with the same angle in one pair of opposite vertices. The influence of the shape of the inclusions on the dimensions of the exfoliated surface was analyzed.

**Ключові слова** – криволінійне включення, пластичне відшаровування, конформне відображення, задача Келдиша-Седова.

**Keywords** – curvilinear inclusion, plastic exfoliation, conformal mapping, Keldich-Sedov problem.

### I. ВСТУП

Дослідження пластичного відшаровування включень розпочалося з роботи [1], у якій пластичне відшаровування пов'язується із розвитком пластичних шарів на межі включення – середовище, які супроводжуються тангенціальним розривом переміщення. У цій роботі досліджувалося пластичне відшаровування плоского включення нехтовно малої товщини. Приймалося, що від вершин включення, розвиваються пластичні шари, які розмежують включення та середовище вздовж деякої, залежної від величини навантаження, частини поверхні включення (міжфазне пластичне відшаровування). Наступні подібні дослідження стосувалися систем взаємодіючих тонких включень [2], включень призматичних форм, що попередньо могли перебували у неідеальному контакті з середовищем [3,4], а також пластичного відшаровування з формуванням об'ємно розподіленої пластичної зони з наперед невідомою межею [5].

Актуальними і поки недостатньо вивченими залишалося міжфазне пластичне відшаровування включень обмежених криволінійними поверхнями хоча саме такі концентратори часто з'являються в результаті технологічних процесів і можуть бути конструктивно необхідними [6].

**Метою даного дослідження** є вивчення розвитку міжфазного пластичного відшаровування жорстких включень складніших форм за наявності кутових точок на їх поверхні та аналіз впливу форми включень на пластичне відшаровування.

### II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Дослідимо напружено деформівний стан (НДС) ідеально пружно-пластичного необмеженого тіла, що містить абсолютно жорстке включення, обмежене двома

однаковими циліндричними поверхнями:  $x_0 - \sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq -x_0 + \sqrt{R^2 - y^2}$ ,  $-l \leq y \leq l = 0$ ,  $-\infty < z < +\infty$ . Радіус  $R$  поверхонь і кут  $\alpha$  при вершинах включення зв'язані з висотою включення  $2l$  співвідношенням  $R = l \sec \frac{\alpha}{2}$ . Максимальна ширина включення дорівнює  $2h$ ,  $h = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{4}$ . Центр поверхонь знаходиться в точках  $x_0 = \pm l \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ . Деформування спричинено прикладеними у нескінченно віддаленій точці зусиллями  $\tau_{xz} = 0$ ;  $\tau_{yz} = \tau_\infty$  (Рис. 1). Матеріал тіла ідеально пружно-пластичний із зсувною границею текучості рівною  $k$ . Наша задача полягатиме у визначенні НДС стану тіла та закону розвитку пластичних шарів під впливом квазістатично зростаючого навантаження.

### III. ФОРМАЛІЗАЦІЯ, АНАЛІЗ І РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

Внаслідок концентрації напружень в околі вершин включень розвиваються пластичні зони, які ми вважаємо локалізованими на межі включення середовища у шарах  $(x \pm x_0)^2 + y^2 = R^2$ ,  $|x| \leq x_1$ , де  $\pm x_1$  – залежні від рівня навантаження абсциси їх кінців. Пластичні деформації призводять до порушення механічного зв'язку матриці із середовищем з виникненням між ними тангенціального розриву переміщення (рис. 1).

Дослідимо НДС тіла поза включенням.

Поставимо крайову задачу у напруженнях в області  $D = \{(x, y) \mid x < 0, y > 0, (x - x_0)^2 + y^2 > R^2\}$  – частині другого квадранта:

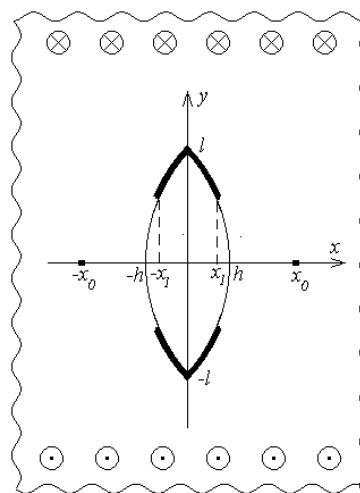


Рис. 1. – Поперечний переріз тіла. Потовщені відрізки – пластичні шари.

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x, 0) &= 0, \quad -\infty < x < -h; \\ \tau_{yz}(x, y) &= 0, \quad (-h < x < x_1, (x - x_0)^2 + y^2 = R^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^2(x, y) + \tau_{yz}^2(x, y) &= k^2, \\ (-x_1 < x < 0, (x - x_0)^2 + y^2 &= R^2); \\ \tau_{xz}(0, y) &= 0, \quad (l < y < +\infty); \\ \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} \tau_{xz}(x, y) &= 0; \quad \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} \tau_{yz}(x, y) = \tau_\infty; \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\vec{n}$  – одиничний тангенціальний вектор на межі включення - середовище.

Умови (1) послідовно виражають: непарність переміщення відносно осі абсцис; відсутність переміщення на невідшарованих ділянках поверхні включення, умову пластичності на відшарованій поверхні включення, парність переміщення відносно осі ординат та спосіб і величину навантаження.

Додатково повинна виконуватися умова:

$$\tau_{xz}^2(x, y) + \tau_{yz}^2(x, y) = k^2, (x \notin [0; h], (x - x_0)^2 + y^2 = R^2), \quad (2)$$

котра гарантує недосягнення пластичного стану поза міжфазними шарами.

Складена із компонент напружень функція  $\tau(\zeta) = \tau_{xz}(x, y) + i\tau_{yz}(x, y)$ ,  $\zeta = x + iy$  є аналітичною та однолистою в області  $D$  і конформно відображає її на область  $G$  комплексної площини  $\tau$  (Рис. 2).

Стосовно функції  $\tau(\zeta)$  крайова задача (1) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0, \quad (\zeta = x, -\infty < x < -h); \\ \operatorname{Im} \tau(\zeta) d\zeta &= 0, \quad (\zeta \in BC); \\ |\tau(\zeta)| &= k, \quad (\zeta \in CD); \\ \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0, \quad (\zeta = iy, l < y < +\infty); \\ \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tau(\zeta) &= \tau_\infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Для розв'язання задачі (3) застосуємо конформні відображення рис. 2. Зауважимо, що оскільки ділянка  $BC$  границі області  $G$ , відповідна невідшарованій частині поверхні включення априорі невідома, безпосередньою побудовою відображення [7] знайти функцію  $\tau(\zeta)$

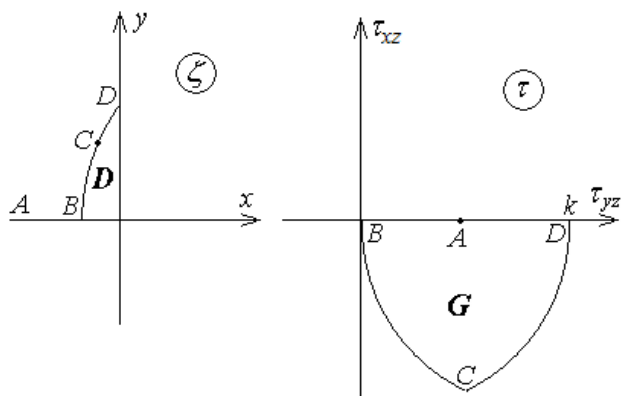


Рис. 2. – Области конформних відображень у площинах  $\zeta$  і  $\tau$ .

неможливо.

Але відповідною заміною шуканої функції задачу (1) можна звести до задачі Келдиша-Седова [8]. Уведемо площину допоміжного комплексного параметра  $t$  так аби її верхня частина  $H = \{t \mid \operatorname{Im} t > 0\}$  конформно

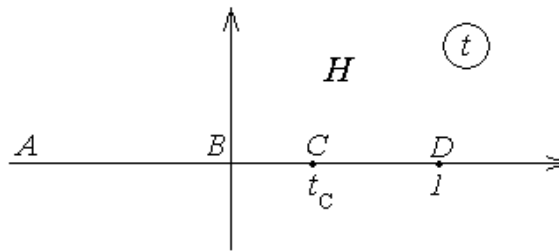


Рис. 3. Площина допоміжного комплексного параметра  $t$

відображалася на область  $D$  (Рис. 3) і шукатимемо розв'язок крайової задачі (3) у параметричному вигляді:

$$\tau = \tau(t), \zeta = \zeta(t), \quad (t \in H) \quad (4)$$

У площинах  $\zeta$  і  $t$  області конформних відображень є наперед відомими, а саме

відображення  $\zeta = \zeta(t)$  визначає функція

$$\zeta(t) = l \frac{(\sqrt{t} + 1)^2 + (\sqrt{t} - 1)^2}{(\sqrt{t} + 1)^2 - (\sqrt{t} - 1)^2}, \quad (5)$$

де  $\lambda = \frac{2\pi - \alpha}{2\pi}$ . Тут і далі у цій роботі під  $t^q$  ( $t$  - комплексна змінна,  $q$  - дійсне число,  $|q| < 1$ ) розумітимемо аналітичну в області  $H$  функцію, що приймає дійсні додатні значення на дійсній додатній півосі.

Покажемо, що тепер визначення функції  $\tau(t)$  зводиться до задачі Келдиша-Седова для функції

$$\varphi(t) = \ln \frac{\tau(t)}{k}. \quad (6)$$

Внаслідок умов (3) отримаємо для  $\varphi(t)$  таку крайову задачу в області  $H$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \varphi(t) &= 0, \quad (t \in (-\infty; 0)); \\ \operatorname{Im} \varphi(t) &= -\arg \zeta'(t), \quad (t \in [0; t_c]); \\ \operatorname{Re} \varphi(t) &= 0, \quad (t \in (t_c; 1)); \\ \operatorname{Im} \varphi(t) &= 0, \quad (t \in [1; +\infty)). \end{aligned} \quad (7)$$

Оскільки, ділянка  $t \in [0; 1]$  границі області  $H$  відображається функцією  $\zeta(t)$  у дугу  $BC$  межі області  $D$ . Із формули (5) отримуємо:

$$\begin{aligned} x(t) &= -2l \sin(\pi\lambda) f_5(t) / w(t), \\ y(t) &= l(f_1(t) - f_2(t)) / w(t), \end{aligned} \quad (8)$$

де  $f_1(t) = (1 + \sqrt{t})^{2\lambda}$ ,

$$f_2(t) = (1 - \sqrt{t})^{2\lambda},$$

$$f_3(t) = (1 + \sqrt{t})^{2\lambda-1},$$

$$f_5(t) = (1-t)^\lambda,$$

$$w(t) = f_1(t) + f_2(t) - 2\cos(\pi\lambda)f_5(t).$$

І, отже, на відрізьку  $t \in [0; 1]$

$$\arg \zeta'(t) = \arctg \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad (9)$$

де

$$x'(t) = 2 \left( \frac{(f_3(t)f_6(t) - f_4(t)f_6(t) + 2\cos(\pi\lambda)f_7(t))f_5(t)}{w^2(t)} \right) \times$$

$$\times l \sin(\pi\lambda) + l \frac{f_7(t)}{w(t)},$$

$$y'(t) = -l \cdot \frac{(f_3(t)f_6(t) - f_4(t)f_6(t) + 2\cos(\pi \cdot \lambda)f_7(t)) \cdot (f_1(t) - f_2(t))}{w^2(t)} +$$

$$+ l \cdot \frac{f_6(t)(f_4(t) + f_3(t))}{w(t)},$$

$$f_4(t) = (1 - \sqrt{t})^{2\lambda-1}, \quad f_6(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{t}}, \quad f_7(t) = \lambda(1-t)^{\lambda-1}.$$

Розв'язок крайової задачі Келдиша-Седова (7) зводиться до квадратур:

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{(t-t_c)(t-1)}}{\pi} \int_0^{t_c} \frac{\arg \zeta'(\eta) d\eta}{\sqrt{(\eta-t_c)(\eta-1)(\eta-t)}}. \quad (10)$$

Із формули (6) отримуємо

$$\tau(t) = ke^{q(t)} \quad (11)$$

Оскільки

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{t_c} \frac{\arg \zeta'(\eta) d\eta}{\sqrt{(\eta-t_c)(\eta-1)}},$$

то із формул (3) і (11) параметр  $t_c$  з величиною діючого навантаження  $\tau_\infty$  визначається співвідношенням:

$$\ln \frac{\tau_\infty}{k} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{t_c} \frac{\arg \zeta'(\eta) d\eta}{\sqrt{(\eta-t_c)(\eta-1)}}. \quad (12)$$

Можна переконатися, що права частина рівняння (12) є монотонно-спадною функцією від  $t_c$  і при зміні  $t_c$  на відрізьку  $[0; 1]$  змінюється від 0 до  $-\infty$ . І, отже, для кожного  $\tau_\infty \in [0; k]$  рівняння (12) має єдиний розв'язок на відрізьку  $[0; 1]$ .

Таким чином розв'язок крайової задачі (3) дають функції (5), (11) для яких параметр  $t_c$  визначається із розв'язку рівняння (12).

Знайдемо тепер довжини смуг пластичного відшаровування у залежності від величини навантаження.

Кінцевій точці смуги у площині  $t$  відповідає  $t = t_c$ . Тому, за формулою (8):

$$x_1 = -2l \sin(\pi\lambda) f_5(t_c) / w(t_c),$$

$$y_1 = l(f_1(t_c) - f_2(t_c)) / w(t_c).$$

Кутову величину пластичних смуг і частину відшарованої поверхні включення дають формули:

$$\psi = 2 \arcsin \frac{\sqrt{x_1^2 + (l - y_1)^2}}{2R} \quad \text{і} \quad \theta = \frac{2\psi}{\alpha}. \quad (13)$$

Якщо кут при вершині включення  $\alpha = 0$ , ширина включення стає нульовою, а саме включення прямолінійним плоским:  $x = 0; |y| \leq l$ . Тоді  $\lambda$  у формулі (5)

дорівнює одиниці, а  $\zeta(t) = il\sqrt{t}$ . На відрізьку  $[0; 1]$  дійсної осі  $t$   $\arg \zeta'(t) = \pi/2$ . Із формул (10), (11) для цього випадку отримуємо:

$$\tau(t) = k \frac{\sqrt{t_c - t} + i\sqrt{1 - t_c}\sqrt{t}}{\sqrt{t_c}\sqrt{1 - t}}, \quad t_c = 4 \frac{k^4 \tau_\infty^4}{(k^2 + \tau_\infty^2)^2}.$$

Для довжини  $d$  смуги пластичного відшарування отримуємо просту явну залежність:

$$d = 2l \frac{\tau_\infty^2}{k^2 + \tau_\infty^2} \quad (14)$$

Знайдені для цього часткового випадку функція напружень і довжина шару пластичного відшарування співпадають із раніше відомими [1].

Іншим частковим випадком вище розв'язаної задачі є задача про кругове циліндричне включення ( $\alpha = \pi$ ). У цьому випадку зникає кутова точка, включення набуває у перерізі кругової форми  $x^2 + y^2 = l^2$ . Параметр  $\lambda = 1/2$ .

На противагу випадку з кутовою точкою на поверхні включення, для якого пружне поле напружень сингулярне і пластичні зони проявлятимуться навіть за як завгодно малого навантаження, у випадку включень із гладкою поверхнею при малих навантаженнях границя текучості не досягається. Тому для гладких включень не завжди можна припускати наявність дугової ділянки на межі області  $G$  (див. рис. 2). Зокрема для кругового включення ця ділянка появляється для навантажень  $\tau_\infty > k/2$ . Тоді одержуємо:

$$\tau(\zeta) = \frac{(\zeta^2 + R^2)f(\zeta) + \tau_\infty(\zeta^2 + R^2)^2 - 4kR^2\zeta^2}{2\zeta^2(\zeta^2 - R^2)},$$

$$\zeta(t) = l \frac{\sqrt{\sqrt{t} + 1} + \sqrt{\sqrt{t} - 1}}{\sqrt{\sqrt{t} + 1} - \sqrt{\sqrt{t} - 1}}.$$

$$\text{де } f(\zeta) = \sqrt{\tau_\infty^2(\zeta^2 + R^2)^2 - 4kR^2\zeta^2(2\tau_\infty - k)}.$$

Кутовий розмір пластичної смуги дає формула:

$$\theta = \begin{cases} \arccos \frac{k - \tau_\infty}{\tau_\infty}, & \tau_\infty \geq k; \\ 0, & k < k. \end{cases} \quad (15)$$

Для з'ясування впливу кривини поверхні включення на його пластичне відшарування приведемо розв'язок задачі про пластичне відшарування ромбічного у

перерізі включення з кутом  $\alpha$  при одній парі протилежних вершин, відстань між якими рівна  $2l$ ,  $|x|/(l \operatorname{tg}(\alpha)) + |y|/l \leq 1$  (тобто включення описаним навколо циліндрично обмеженого) [3]. Тоді довжина міжфазних пластичних шарів виражається через бета-функції:

$$d = l \sec(\alpha) \left( 1 - \frac{1}{B} \int_0^{p_0^2} (1-t)^{\frac{2\alpha-\pi}{2\pi}} t^{\frac{\alpha}{\pi}} dt \right),$$

де  $p_0 = \left( \frac{1-\tau_\infty/k}{1+\tau_\infty/k} \right)^{\pi/\alpha}$ ,  $B = B\left(\frac{\pi+\alpha}{\pi}, \frac{\pi+2\alpha}{2\pi}\right)$  – повна бета-функція.

Залежності  $\eta$  – частини відшарованої поверхні циліндрично обмежених і ромбічних включень від величини навантаження для декількох значень кутів при їх вершинах наведено на рис. 4.

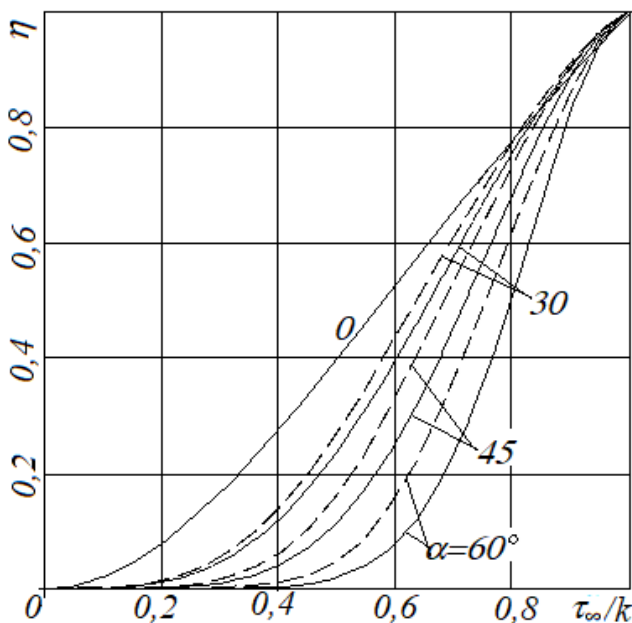


Рис. 4. Частина відшарованої поверхні включення. Суцільна лінія – ромбічне включення; штрихова – циліндрично обмежене.

#### IV. ВИСНОВКИ

Досліджено антиплоский НДС при зсувному деформуванні необмеженого ідеально пружно-пластичного тіла із жорстким включенням, обмеженим двома циліндричними поверхнями однакової кривини. На початковій стадії пластичне відшаровування такого включення визначається кутами при його вершинах, а довжина міжфазних пластичних смуг, як величина навантаження, для циліндрично обмеженого і ромбічного включень однакова за умови рівності кутів при вершинах включень. З ростом навантаження відшаровування циліндрично обмеженого включення пришвидшується, що особливо помітно при більших кутах при його вершинах. Що менший кут при вершинах, то ближчі залежності

довжин пластичних шарів від навантаження для обох типів включень. Коли цей кут наближається до нуля обидві залежності довжини пластичних смуг від навантаження збігаються і стають рівними їй для прямолінійного включення нульової товщини.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Витвицкий П.М., Кривень В.А. Антиплоская упруго-пластическая деформация тела с жестким тонким включением // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1979. - №2. – С. 104-108..
- [2] Kryven' V. A., Sulim G.T, Javorska M.I. Plastic interfacial slip of periodic systems of rigid thin inclusions undergoing longitudinal shear // JTAM. – 2006. V.44, No. 4. – S. 837-848.
- [3] Кривень В.А. Двоперіодична пружнопластична задача поздовжнього зсуву тіла з жорсткими ромбічними включеннями // Математичні методи і фіз.- мех. поля. – 2001. – Т. 44, №1. - С. 109-113.
- [4] Кривень В. А., .Валяшек В.Б. Початкова стадія пластичного відшаровування прямокутного включення за умови однобічного контакту з середовищем // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2010. – Том 53, № 4. – С. 107-116.
- [5] Kryven' V. A., Valiashek V. B., Tymbaliuk L.I., Blashchak N. I. // Journal of Mathematical Sciences. – 2023, Vol. 273, No. 6. – P. 1031 – 1038.
- [6] Саврук М. П., Казберук А. Механіка руйнування та міцність матеріалів [Текст] : довідн. посіб. за заг. ред. В. В. Панасюка ; Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами. – Львів : СПОЛЮМ, 2012. - 384 с. (78).
- [7] Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. Пер. с нем. К. М. Фишмана под ред. Л. И. Волковьского, Москва: ИЛ, 1963. –406с.
- [8] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1968. –512с..