# Наближення Функцій Трьох Змінних Скінченними Сумами Фур'є з Використанням Томограм

Олег О. Литвин
кафедра інформаційно-комп'ютерних технологій і математики
Українська інженерно-педагогічна академія
Харків, Україна
olegolitvin55@gmail.com

Олександра Литвин
кафедра прикладної математики
Харківський національний університет радіоелектроніки
Харків, Україна
oleksandra.litvin@nure.ua

# Approximation of Functions of Three Variables by Finite Fourier Sums Using Tomograms

Oleg O. Lytvyn
Department of Informational Computer Technologies and Mathematics
Ukrainian Engenering-Pedagogical Academy
Kharkiv, Ukraine
olegolitvin55@gmail.com

Oleksandra Lytvyn
Department of Applied Mathematics
Kharkiv National University of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
oleksandra.litvin@nure.ua

***Анотація*—У даній роботі продовжено дослідження авторів у проблемі наближення функцій трьох змінних скінченними сумами Фур'є з використанням томограм. Основна увага приділена обчисленню 3D коефіцієнтів Фур'є. У даній роботі для їх обчислення не використовують безпосередньо значення функції в окремих точках області інтегрування, а також пряме та обернене перетворення Радона. Для обчислення цих коефіцієнтів використовуються томограми – зображення слідів наближуваної функції трьох змінниих на заданих площинах. Наведена чисельна реалізація методу, пов'язана з обчисленням 3D коефіцієнтів Фур'є та наближенням функцій трьох змінних. Отримано результати, що підтверджують ефективність методу.**

***Abstract*—This work continues the authors' research on the problem of approximation of functions of three variables by finite Fourier sums using tomograms. The main attention is paid to the calculation of 3D Fourier coefficients. In this work, the values of the function at individual points of the integration area, as well as the direct and inverse Radon transformation, are not used directly for their calculation. To calculate these coefficients, tomograms are used - images of traces of an approximate function of three variables on given planes. The numerical implementation of the method related to the calculation of 3D Fourier coefficients and the approximation of functions of three variables is given.The results confirming the effectiveness of the method were obtained.**

***Ключові слова—комп'ютерна томографія, 3D коефіцієнти Фур'є, проєкції, томограми, базові площини, потрійні та повторні інтеграли***

***Keywords—computed tomography, 3D Fourier coefficients, projections, tomograms, base planes, triple and repeated integrals***

## I. Вступ

Відома велика роль коефіцієнтів Фур'є функцій багатьох змінних у цифровій обробці багатовимірних сигналів. Для знаходження коефіцієнтів Фур'є функцій багатьох змінних необхідно обчислення інтегралів, які є добутком невідомої функції на експоненціальний швидко осцилюючий множник. Класичні кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є використовують значення наближуваної функції в окремих точках.

В останні десятиріччя у зв'язку з появою комп'ютерних томографів з'явились нові інформаційні оператори, які не використовують безпосередньо значення функції в окремих точках області інтегрування. Це проєкції (інтеграли від наближуваної функції вздовж заданої системи прямих), томограми – зображення слідів наближуваної функції трьох змінниих на заданих площинах тощо. Класичне обчислення коефіцієнтів Фур'є за допомогою проєкцій, що поступають з комп'ютерного томографа, основане на використанні формул для прямого та оберненого перетворення Радона [1]. Для 2D випадку такі дослідження проводились в класичних схемах комп'ютерної томографії, зокрема в прямому методі Фур'є [2]. Інший підхід для обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є, без використання прямого та оберненого перетворення Радона, був запропонований у 2000 році Олегом М. Литвином [3]. Ідея методу для 3D випадку була запропонована вперше авторами у 2019 році [4]. У роботі авторів [5] побудовані явні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є, які дозволяли проводити обчислюваний експеримент і досліджувати його ефективність для класів неперервних та диференційовних функцій. Для проведення обчислень отримані явні формули для всіх плоских підобластей, в яких розміщені томограми. Вважається, що ці томограми надходять з комп'ютерного томографа. Тобто виведені явні формули заміни потрійних інтегралів повторними, які не вимагають використання оберненого перетворення Радона. Це дозволяє зменшити похибки при наближені функцій трьох змінних, а також дослідити можливість побудови математичної моделі внутрішньої структури об'єкта, коефіцієнт поглинання рентгенівських променів якого описується функцією трьох змінних.

Дана робота присвячена подальшому дослідженню методу наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних за допомогою інтегралів від томограм, розміщених на системі площин, паралельних базовим площинам, а також чисельній реалізації методу.

## II. Постановка задачі

Вважаємо, що функція $f(x,y,z)\in C^r(\tilde{D})$, $\tilde{D}=[0,1]^3$, є неперервною разом із своїми частинними похідними до порядку $r, r\ge 0$ включно, та періодичною з періодом одиниця за кожною з трьох змінних.

Для обчислення коефіцієнтів Фур'є функції $f(x,y,z)$:

$$C_{k,l,m}(f)=\iiint\limits_{\tilde{D}} f(x,y,z)e^{-i\,2\,\pi(k\;x+l\;y+m\;z)}dx\,dy\,dz,$$

$$-N\le k,l,m\le N$$

задано лише сліди (томограми) від функції $f(x,y,z)$ в площинах, паралельних площині:

$$kx+ly+mz=t,\ 0\le t\le k+l+m.$$

Треба розробити алгоритм обчислення цих коефіцієнтів з використанням вказаних слідів і дослідити деякі аспекти його обчислюваної ефективності. Зокрема, використати явні формули для меж інтегрування при обчисленні подвійних інтегралів від сліду функції $f(x,y,z)$ для кожного значення $t$ при різних значеннях $k,l,m$.

## III. Алгоритм відновлення функції $f(x,y,z)$ за допомогою 3D скінченних сум Фур'є з використанням томограм

Будемо наближувати функцію $f(x,y,z)$ 3D скінченними сумами Фур'є. Таке наближення будемо позначати $f_N(x,y,z)$:

$$f_N(x,y,z)=\sum_{-N}^{N}\sum_{-N}^{N}\sum_{-N}^{N}C_{k,l,m}(f)e^{2i\pi(kx+ly+mz)}.$$

Коефіцієнти Фур'є визначаються так:

$$C_{k,l,m}(\varphi)=\iiint\limits_{\tilde{D}} f(x,y,z)e^{-i\,2\,\pi(k\;x+l\;y+m\;z)}dx\,dy\,dz.$$

Замість ортогональної системи координат *Oxyz* введемо ортогональну систему *Otuv*. З цією ме тою у формулі для коефіцієнтів Фур'є робимо заміну [4]:

$$\begin{cases} k\,x+l\,y+m\,z=t;\\ l\,x-k\,y=u;\\ m(k\,x+l\,y)-\left(k^2+l^2\right)z=v.\end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему відносно $x,y,z$.

$$\begin{cases} x=X(t,u,v,k,l,m)=\dfrac{t\,k\left(k^2+l^2\right)+u\,l\left(k^2+l^2+m^2\right)+v\,k\,m}{\left(k^2+l^2\right)\left(k^2+l^2+m^2\right)};\\ y=Y(t,u,v,k,l,m)=\dfrac{t\,l\left(k^2+l^2\right)-u\,k\left(k^2+l^2+m^2\right)+v\,l\,m}{\left(k^2+l^2\right)\left(k^2+l^2+m^2\right)};\\ z=Z(t,u,v,k,l,m)=\dfrac{m\,t-v}{k^2+l^2+m^2}.\end{cases}$$

Якобіан перетворення обчислюється так:

$$J(k,l,m)=\frac{1}{\left(k^2+l^2\right)\left(k^2+l^2+m^2\right)},\ J(k,l,m)>0.$$

У результаті вказаної заміни координат формулу для $C_{k,l,m}(f)$ можна записати у вигляді:

$$C_{k,l,m}(f)=\iiint\limits_{D} F(t,u,v,k,l,m)e^{-i2\pi t}J(k,l,m)\,du\,dv\,dt,$$

де

$$F(t,u,v,k,l,m)=$$
$$f\left(X(t,u,v,k,l,m),Y(t,u,v,k,l,m),Z(t,u,v,k,l,m)\right),$$

$$D=\begin{Bmatrix}(t,u,v):0\le X(t,u,v,k,l,m)\le 1,\\ 0\le Y(t,u,v,k,l,m)\le 1,\,0\le Z(t,u,v,k,l,m)\le 1\end{Bmatrix}.$$

З подвійних нерівностей отримуємо межі інтегрування по змінних $u, v$:

$$u_1(t,v,k,l,m)\le u\le u_2(t,v,k,l,m),$$

$$v_1(t,k,l,m)\le v\le v_2(t,k,l,m).$$

Зауважимо, що функції:

$$v_1(t,k,l,m),\, v_2(t,k,l,m),\, u_1(t,v,k,l,m),\, u_2(t,v,k,l,m)$$

будуть задаватися різними аналітичними виразами в залежності від співвідношень між індексами $k, l, m$ і, в залежності від значень $t$ $(0 \le t \le k+l+m)$. Визначення меж інтегрування забезпечує перехід від потрійного інтеграла в формулі для $C_{k,l,m}(f)$ до повторного.

У роботі [5] розроблено та наведено формули переходу від потрійних інтегралів до повторних. Розглянуті всі можливі випадки значень $k,l,m$, а саме, всі значення індексів додатні, серед них є від'ємні, серед них є рівні нулеві. За базовий набір індексів приймається випадок, коли всі індекси додатні.

У результаті потрійні інтеграли приймуть вигляд:

$$I_{ij} = \int_{t_{1i}}^{t_{2i}} \left[ \int_{v_{1ij}}^{v_{2ij}} \left[ \int_{u_{1ij}}^{u_{2ij}} F(t,u,v,k,l,m)\, du \right] dv \right] e^{-i2\pi t} J(k,l,m)\, dt.$$

Тут прийнято скорочення:

$$u_{1ij} = u_{1ij}(t,v,k,l,m),\, u_{2ij} = u_{2ij}(t,v,k,l,m);$$
$$v_{1ij} = v_{1ij}(t,k,l,m), \quad v_{2ij} = v_{2ij}(t,k,l,m).$$

Область $D_{ij}$ задається так:

$$D_{ij} = \left\{ (t,u,v) : t_{1i} \le t \le t_{2i},\, v_{1ij} \le v \le v_{2ij},\, u_{1ij} \le u \le u_{2ij} \right\}.$$

При кожному фіксованому значенні $t$ інтеграл:

$$\int_{v_1(t,k,l,m)}^{v_2(t,k,l,m)} \left[ \int_{u_1(t,v,k,l,m)}^{u_2(t,v,k,l,m)} F(t,u,v,k,l,m)\, du \right] dv$$

є інтегралом від сліду функції $f(x,y,z)$ по області $D_{uv}(t)$, що належить площині $kx+ly+mz=t$.

Тобто чисельно такий внутрішній подвійний інтеграл є інтегралом від томограми.

Під томограмою розуміємо зображення – слід функції $f(x,y,z)$ на площині $t = const$.

Аналізуючи наведене, робимо висновок, що процес відтворення функції трьох змінних полягає у підрахунку кофіцієнтів Фур'є (відповідні формули наведено в роботі [5]) та формуванні скінченної потрійної суми Фур'є.

## IV. Чисельна реалізація

У чисельному експерименті розглянуто приклади підрахунку 3D коефіцієнтів Фур'є та наближення функцій трьох змінних.

Приклад 1. Підрахунок коефіцієнтів Фур'є для заданих функцій при фіксованих значеннях індексів $k,l,m$ за наведеним алгоритмом та порівняння їх з точними значеннями.

У табл. 1 наведено порівняння результатів обчислення коефіцієнтів Фур'є з точними їх значеннями. Спостерігається незначне відхилення.

ТАБЛИЦЯ I. Порівняння результатів обчислення коефіцієнтів Фур'є

| **Задана функція** $f(x,y,z)$ | **Значення** $k,l,m$ | **Точне значення** $C_{k,l,m}$ | **Наближене значення** $C_{k,l,m}$ |
|---|---|---|---|
| $sin(6\pi x)\cdot sin(8\pi y)\cdot sin(10\pi z)$ | 3, 4, 5 | $0.125\cdot i$ | $-3.955\cdot 10^{-8}+$ $+0.125\cdot i$ |
| $sin(6\pi x)\cdot sin(8\pi y)\cdot sin(10\pi z)$ | –3, –4, –5 | $-0.125\cdot i$ | $-3.955\cdot 10^{-8}-$ $-0.125\cdot i$ |
| $xyz$ | 3, 5, 6 | $-4.479\cdot i\cdot 10^{-5}$ | $-2.73\cdot 10^{-8}-$ $-4.479\cdot i\cdot 10^{-5}$ |
| $-xyz(x-1)(y-1)(z-1)$ | 2, 3, 5 | $-1.445\cdot 10^{-7}$ | $-1.419\cdot 10^{-7}-$ $-6.808\cdot i\cdot 10^{-9}$ |
| $-xyz(x-1)(y-1)(z-1)$ | –2, –3, –5 | $-1.445\cdot 10^{-7}$ | $-1.419\cdot 10^{-7}+$ $+6.808\cdot i\cdot 10^{-9}$ |

У чисельному експерименті розглянуто приклади наближення функцій трьох змінних для тестових задач. Порядок суми Фур'є задавався. Підраховувались відповідні похибки наближення.

Приклад 2. Наближення тестових функцій, заданих в області $D=[0,1]^3$, 3D скінченними сумами Фур'є з використанням томограм:

$$f_1(x,y,z) = x(1-x)y(1-y)z(1-z);$$

$$f_2(x,y,z) = sin(2\pi x)sin(4\pi y)sin(6\pi z).$$

Зафіксуємо число $N$ – порядок суми Фур'є, поклавши $N=5$. Це означає, що буде обчислено $11\times 11\times 11 = 1331$ 3D коефіцієнтів Фур'є. Підраховуємо всі коефіцієнти, підставляємо їх у формулу потрійної скінченної суми Фур'є та порівнюємо значення заданих тестових функцій та їх наближень. У табл. 2 наведено похибки наближення.

ТАБЛИЦЯ II. Похибки наближення функцій

| **Наближу-вані функції** | **Похибки наближення** | | |
|---|---|---|---|
| | ***Абсолютна*** | ***Відносна*** | ***Середньоквадратична*** |
| $f_1(x,y,z)$ | $1{,}2\cdot 10^{-3}$ | $7{,}5\cdot 10^{-2}$ | $2{,}1\cdot 10^{-4}$ |
| $f_2(x,y,z)$ | $1{,}03\cdot 10^{-8}$ | $1{,}03\cdot 10^{-8}$ | $2{,}7\cdot 10^{-9}$ |

Для візуалізації зафіксуємо одну із змінних. На рис. 1 та рис. 2 наведено зображення заданих тестових функцій та їх наближень при $z=0.3$ та $y=0.3$ відповідно.

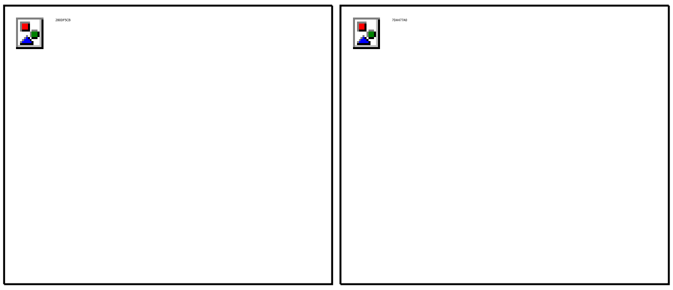

Рис. 1. Зображення тестової функції $f_1(x,y,z)$ та її наближення при $z = 0.3$

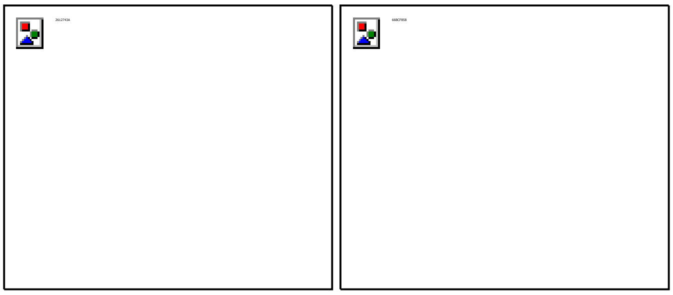

Рис. 2. Зображення тестової функції $f_2(x,y,z)$ та її наближення при $y = 0.3$

## Висновки

У даній роботі досліджувався запропонований авторами метод наближення функцій трьох змінних скінченними сумами Фур'є з використанням томограм. Метод може бути використано в комп'ютерній томографії, зокрема для отримання необхідних для діагностики томограм, виходячи із знайденого наближення функції трьох змінних. Результати чисельного експерименту підтвердили ефективність методу.

## Література References


[1] J. Radon, Uber die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralverte l ngs gewisser Manningfaltigkeiten. Berichte Sachsische Academie der Wissenschaften. Leipzig, Mathem.-Phys. K1., 69, 1917, pp. 262–267.

[2] D. Gottlieb, B. Gustafsson, P. Forssen. On the Direct Fourier Method for Computer Tomography // IEEE Transactions On Medical Imaging, V. 19, N. 3, March 2000, pp. 223 – 232.

[3] O. M. Lytvyn, “Periodic splines and a new method for solving the plane problem of X-ray computerized tomography”, System analysis, management and information technologies: Herald of Kharkiv State. Polytechnic. un-th Collection of scientific works. Issue 125, Kharkiv: KhDPU, 2000, pp. 27–35 (in Ukraine).

[4] O. M. Lytvyn, O. G. Lytvyn, O. O. Lytvyn, Method of Calculating Fourier Coefficients of Three Variable Functions Using Tomogram, Advanced Computer Information Technologies, Ceske Budejovice,Czech Republic, 5–7 June 2019, pp. 125–128.

[5] O. M. Lytvyn, O. G. Lytvyn, O. O. Lytvyn, Explicit formulas for calculating Fourier coefficients of three variables using tomograms // 10th International conference on advanced computer information technologies ACIT’2020 16–18 of September 2020. Degendorf, Germany. P. 148–151.