Задача про Найкоротший Маршрут з Нечітко Заданим Часом Руху Комунікаціями

Ольга Матвієнко
кафедра прикладної математики
Харківський національний університет радіоелектроніки
Харків, Україна
olha.matviienko@nure.ua

Олександр Мірошниченко
кафедра прикладної математики
Харківський національний університет радіоелектроніки
Харків, Україна
oleksandr.miroshnichenko@nure.ua

The Problem of the Shortest Route with Fuzzy Travel Time Along Communications

Olha Matviienko
dept. of Applied Mathematics
Kharkiv National University of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
olha.matviienko@nure.ua

Oleksandr Miroshnichenko
dept. of Applied Mathematics
Kharkiv National University of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
oleksandr.miroshnichenko@nure.ua

***Анотація*—Робота присвячена дослідженню класичної задачі теорії графів – задачі про найкоротший маршрут, в якій витрати на рух задані нечіткими величинами. Наводиться постановка задачі та пропонується алгоритм її розв’язання.**

***Abstract*— The work is devoted to the study of the classic problem of graph theory - the problem of the shortest route, in which the costs of movement are given by fuzzy values. The statement of the problem is presented and an algorithm for its solution is proposed.**

Ключові слова—маршрут; нечітке число; мережа; функція приналежності; комунікація

Keywords— route; fuzzy number; chain; membership function; communication

I. Вступ

При організації руху великий інтерес представляє задача про відшукання найкоротшого маршруту, що з'єднує два задані пункти. Як транспортні витрати можна розглядати не тільки пройдену відстань, а й сумарні грошові витрати на проїзд за маршрутом або час руху маршрутом, або витрати пального тощо.

II. Задача про найкоротший маршрут

Однією з класичних задач теорії графів є задача про найкоротший шлях [1]. Дана мережа, що містить m вершин. Кожній її комунікації (i, j) відповідає число d_{ij} – довжина комунікації (i, j). Потрібно знайти змішаний шлях з вершини 1 у вершину m , що має мінімальну довжину.

Наразі отримано цілу низку алгоритмів для її вирішення, одним із найбільш ефективних є алгоритм Дейкстри [1]. Але Дейкстра та інші автори припускали, що витрати на рух будь-якою комунікацією чітко визначені, що насправді далеко не завжди відповідає дійсності. Тому розглянемо цю задачу в нечіткій постановці.

III. Задача про найкоротший маршрут з нечітко заданим часом руху комунікаціями

Припускатимемо, що всього на мережі є m пунктів, всі пункти упорядковано та перенумеровано числами від 1 до m, при цьому перший пункт має номер 1, останній — номер m. Під витратами розумітимемо час, який не визначений однозначно, а задається нечітким числом. Потрібно знайти оптимальний маршрут між першим та останнім пунктами.

Час руху комунікацією (i,j), що з'єднує пункти i і j на мережі, будемо вважати нечітким трикутним числом $t_{ij} = \langle a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \rangle$, де a_{ij} — мінімально можливий час руху комунікацією (i,j); c_{ij} —максимально можливий час руху комунікацією (i,j); b_{ij} — мода.

Функцію приналежності нечіткого числа t_{ij} будемо позначати $\mu_{ij}(t)$, де t — елемент універсальної множини T — множини можливих чітких (звичайних) значень витрат часу на рух, $\mu_{ij}(b_{ij}) = 1$, $\mu_{ij}(a_{ij}) = 0$, $\mu_{ij}(c_{ij}) = 0$. Для визначеності будемо вважати, що $T = [0, +\infty)$, функція приналежності $\mu_{ij}(t)$ строго зростає на відрізку $[a_{ij}, b_{ij}]$, та строго спадає на $[b_{ij}, c_{ij}]$.

У підході до поняття «оптимальний маршрут» будемо слідувати ідеям, сформульованим Заде і Беллманом [2].

Універсальною множиною допустимих планів тепер є множина X — множина мереж даної (розглянутої) конфігурації з заданими для кожної комунікації «чітким» значенням часу руху по ній. Це «чітке» значення часу руху комунікацією (i,j) для мережі $x \in X$ будемо позначати $t_x(i,j)$. Зазначимо, що два допустимих плани x та y вважаються різними, якщо існує така (хоча б одна) комунікація (i,j), що $t_x(i,j) \neq t_y(i,j)$, тобто час руху хоча б однією комунікацією на цих мережах різний. Функцію приналежності нечіткої множини допустимих планів $\hat{X}$ задачі позначимо $\mu_{\hat{X}}(x), x \in X$.

Будемо припускати, що мережа має n комунікацій: (i_1, j_1), (i_2, j_2), …, (i_n, j_n). Множина усіх комунікацій: $\Re = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), ..., (i_n, j_n)\}$.

Тоді $t_x(i_1, j_1), t_x(i_2, j_2), ..., t_x(i_n, j_n)$ — набір значень часу руху комунікаціями для плану x, цей набір будемо позначати $\Phi(x)$.

Оскільки допустимі плани відрізняються один від одного лише часом руху комунікаціями, то для повної характеристики допустимого плану x достатньо вказати лише набір чисел: $\Phi(x) = \{t_x(i_1, j_1), t_x(i_2, j_2), ..., t_x(i_n, j_n)\}$.

Маршрут від першого пункту до останнього при плані x, що вимагає мінімальних витрат часу на рух, позначимо $\Im(x)$. Цей маршрут складається з $k(x)$ комунікацій: $(1,i_1), (i_1,i_2), ..., (i_{k(x)-1}, i_{k(x)})$. Таким чином, $\Im(x) = \{(1,i_1), (i_1,i_2), ..., (i_{k(x)-1}, i_{k(x)})\}$. Тут $i_{k(x)} = m$.

Тоді час руху $t(\Im(x))$ за маршрутом $\Im(x)$ задається формулою $t(\Im(x)) = \sum_{(u,v) \in \Im(x)} t_x(u,v).$

Нехай для плану x час руху комунікаціями дорівнює $t_x(i_1, j_1), t_x(i_2, j_2), ..., t_x(i_n, j_n)$, тоді під надійністю плану x розумітимемо величину, рівну $\min_{(k,l) \in \Re} \mu_{kl}(t_x(k,l)).$

Як нечітку множину допустимих планів розглянемо нечітку множину $\tilde{X}$, задану на універсальній множині X функцією приналежності $\mu_{\tilde{X}}(x) = \min_{(k,l) \in \Re} \mu_{kl}(t_x(k,l)).$

Нечітко визначену ціль (нечітку мету) будемо формалізовувати нечіткою множиною $\tilde{X}_c$ з функцією приналежності $\mu_c(x), x \in X$.

Позначимо:

$t^{min}(x)$ — мінімальний час руху з першого пункту в останній за планом x;

T^{min} — мінімальний час руху з першого пункту в останній, коли час руху кожною комунікацією (i,j) мінімальний, тобто дорівнює a_{ij}, сам план з такими часами руху комунікаціями позначимо x^{min}, $\Phi(x^{min}) = \{a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, ..., a_{i_n j_n}\};$

T^{max} — максимальний час руху з першого пункту в останній, у разі, коли час руху кожною комунікацією (i,j) максимальний, тобто дорівнює c_{ij}, сам план з такими значеннями часу позначимо x^{max}, $\Phi(x^{max}) = \{c_{i_1 j_1}, c_{i_2 j_2}, ..., c_{i_n j_n}\}$.

Як функцію приналежності розглянутих планів нечіткій меті (нечіткій множині, що формалізує нечітку мету) будемо використовувати показник близькості плану x до найефективнішого плану — плану x^{min}, що будемо характеризувати близькістю (за часом) маршрутів $\Im(x)$ і $\Im(x^{min})$. Покладемо $\mu_c(x) = \dfrac{T^{max} - t^{min}(x)}{T^{max} - T^{min}}$.

Нечітким рішенням задачі вважатимемо нечітку множину $\tilde{D}$ з функцією приналежності $\mu_{\tilde{D}}(x)$, що є перетином нечіткої множини допустимих планів і нечіткої мети [3, 4]:

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{X}}(x), \mu_c(x)\}.$$

Як рішення пропонується план x^0, для якого

$$\mu_{\tilde{D}}(x^0) = \max_{x \in X} \mu_{\tilde{D}}(x) = \max_{x \in X} \min\{\mu_{\tilde{X}}(x), \mu_c(x)\}. \quad (1).$$

IV. Алгоритм розв'язання задачі

Алгоритм наближеного розв'язання задачі (1).

Задаємо числом кроків N, вважаємо $\Delta = \dfrac{1}{n}$. На кроці з номером $k\,(k = 0,1,2,...,N)$ знаходимо такі значення часу руху t_{ij} комунікаціями, що $\mu_{ij}(t_{ij}) = k \cdot \Delta$ для будь якої комунікації (i,j).

Отриману мережу позначимо x^k, маємо: $\mu_{\tilde{X}}(x^k) = k \cdot \Delta$. Обчислюємо $\mu_c(x^k)$ та $\mu_{\hat{D}}(x^k)$. Маршрут, що потребує мінімальних витрат часу на рух з першого пункту в останній при плані x^{k_0}, для якого $\mu_{\hat{D}}(x^{k_0}) = \max_{0 \le k \le N} \mu_{\hat{D}}(x^k)$ є наближеною відповіддю на питання про оптимальний маршрут.

Ця задача має різноманітні застосування на практиці, наприклад, у GPS-навігаторах для пошуку найкоротшого шляху між двома пунктами або в маршрутизаторах для визначення маршруту доставки повідомлення з одного сервера мережі Інтернет на інший тощо.

Література References

[1] Н. Кристофидес, “Теория графов. Алгоритмический подход,” М.: Мир, 1978, 432 с.

[2] R. E. Bellman, L. A. Zadeh, “Decision-Making in Fuzzy Environment,” Management Science, 1970, vol. 17, № 4, pp. 141-160.

[3] О. І. Матвієнко, О. О. Мірошніченко, “Застосування методів нечіткої векторної оптимізації для складання дієти,” Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях: зб. наук. пр. Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т», Харків : НТУ «ХПІ», 2023, № 2 (5), С. 46-54.

[4] О. І. Матвієнко, С. В. Закутній, “Нечітка логіка в задачах визначення економічних параметрів виконання проєктів,” Сучасний стан наукових досліджень та технологій в промисловості, 2024, № 1 (27), С. 96-108.