

Математичне Моделювання Потоків Маси за Дії Системи Випадкових Точкових Джерел у Тривимірному Випадку

Петро Пукач

Кафедра обчислювальної математики і програмування
Національний університет “Львівська політехніка”,
Львів, Україна
petro.y.pukach@lpnu.ua

Юрій Чернуха

Кафедра обчислювальної математики і програмування
Національний університет “Львівська політехніка”,
Львів, Україна
yurii.a.chernukha@lpnu.ua

3d Mathematical Modeling of Mass Fluxes Under the Action of The System of Random Point Sources

Petro Pukach

Department of Computational Mathematics and
Programming
Lviv Polytechnic National University,
Lviv, Ukraine
petro.y.pukach@lpnu.ua

Yurii Chernukha

Department of Computational Mathematics and
Programming
Lviv Polytechnic National University,
Lviv, Ukraine
yurii.a.chernukha@lpnu.ua

Анотація— Робота присвячена тривимірному математичному опису потоків маси та кількості речовини, що за певний проміжок часу пройшла через смугу, у якому діє система випадкових точкових джерел маси різної потужності у певній внутрішній смузі.

Abstract— The work is dedicated to the three-dimensional mathematical description of mass fluxes and the amount of substance that has passed through a strip over a certain time interval, where a system of random point sources of various power acts within the given internal stripe.

Ключові слова— математичне моделювання; дифузійний потік; система випадкових точкових джерел; функція Гріна; рівномірний розподіл.

Keywords— mathematical modeling; diffusion flux; random point source system; Green's function; uniform distribution.

I. ВСТУП

Дифузія домішкових речовин є одним з фундаментальних процесів у багатьох галузях науки та технологій, включаючи матеріалознавство, механіку, біологію, хімічну інженерію, екологію та медицину. Наприклад, розуміння механізмів дифузії важливе для розробки нових матеріалів з покращеними властивостями, оптимізації процесів очищення стічних вод, розробки ефективніших лікарських препаратів і таргетованої доставки ліків, а також для

Результати отримано в рамках виконання держбюджетної теми Міністерства освіти і науки України, реєстраційний номер 0123U101691.

прогнозування розповсюдження забруднювачів у навколишньому середовищі. Використання стохастичних моделей дозволяє описувати невизначеності та випадкові збурення в процесах дифузії [1,2], що є особливо актуальним для систем, де важливу роль відіграють малі концентрації чи варіації. Тоді вважають, що у внутрішній області тіла діють випадкові джерела.

У даній роботі досліджуються дифузійні потоки домішкової речовини в смузі за дії системи випадково розташованих точкових джерел маси у тривимірному випадку.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай у смузі товщини x_0 дифундує домішкова речовина. При цьому в області тіла діє набір точкових джерел маси $\omega_i \delta(\vec{r} - \hat{r}_i)$ (ω_i – потужність i -го джерела, $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака, \vec{r} – радіус-вектор біжучої точки, \hat{r}_i – випадковий радіус-вектор i -го джерела), які локалізовані в певній внутрішній області, що розглядатимемо як систему джерел у випадкових точках $\vec{r} = \hat{r}_i$, $\hat{x}_i \in [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$ і $0 \leq \bar{x}_1 < \bar{x}_2 \leq x_0$, $\hat{y}_i \in (-\infty, \infty)$, $\hat{z}_i \in (-\infty, \infty)$.

На основі законів Фіка рівняння дифузії домішкової речовини за дії системи точкових джерел в тривимірному за просторовими змінними випадку має вигляд [3].

$$\rho \frac{\partial c(t, \vec{r})}{\partial t} = d \Delta_{\vec{r}} c(t, \vec{r}) + \sum_{i=1}^N \omega_i \delta(\vec{r} - \hat{r}_i), \quad (1)$$

де $c(t, \vec{r})$ – концентрація мігруючої речовини, ρ – густина тіла, d – кінетичний коефіцієнт перенесення, N – кількість випадкових точкових джерел; t – час, $\delta(\vec{r} - \hat{r}_i) = \delta(x - \hat{x}_i)\delta(y - \hat{y}_i)\delta(z - \hat{z}_i)$.

Нехай задано крайові умови першого роду, а саме

$$c(t, \vec{r})|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$c(t, \vec{r})|_{x=0} = c_0 \equiv const, \quad c(t, \vec{r})|_{x=x_0} = c_* \equiv const, \quad (3)$$

$$c(t, \vec{r})|_{y \rightarrow \pm\infty, z \rightarrow \pm\infty} \leq K < \infty. \quad (4)$$

Розв'язок крайової задачі (1)-(4) подаємо у вигляді суми розв'язку однорідної крайової задачі і згортки функції Гріна з системою випадкових точкових джерел [4]. Маємо

$$c(t, \vec{r}) = c^h(t, \vec{r}) + \sum_{i=1}^N \omega_i \int_0^t \iiint_{(V)} G(t, t', \vec{r}, \vec{r}') \delta(\vec{r}' - \hat{r}_i) d^3\vec{r}' dt', \quad (5)$$

де $c^h(t, \vec{r})$ – розв'язок однорідної крайової задачі, а саме

$$c^h(t, \vec{r}) = c_0 \left(1 - \frac{x}{x_0}\right) + c_* \frac{x}{x_0} - \frac{2}{\rho x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} \left(c_0 + (-1)^{n+1} c_*\right) e^{-dx_n^2 t / \rho} \sin(x_n x), \quad (6)$$

де $x_n = n\pi/x_0$, $n = 1, 2, \dots$; $G(t, t', \vec{r}, \vec{r}')$ – функція Гріна задачі (1)-(4):

$$G(t, t', \vec{r}, \vec{r}') = \frac{\theta(t-t')}{dx_0(t-t')} \exp\left\{-\frac{\rho}{4d} \frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{t-t'}\right\} \times \sum_{n=1}^{\infty} e^{-dx_n^2(t-t')/\rho} \sin(x_n x') \sin(x_n x). \quad (7)$$

Тут $\theta(t-t')$ – одинична сходинова функція Хевісайда [5].

Значимо, що інтегрування в (5) проводиться по області $(V) = [0; x_0] \times [-\infty; \infty] \times [-\infty; \infty]$. Для розв'язування крайових задач використовувався метод інтегральних перетворень Лапласа і Фур'є [6,7]

На основі такої постановки задачі на випадкове поле концентрації шукаємо і досліджуємо функції дифузійного потоку і кількості речовини, що пройшла через смугу.

III. ДИFUZІЙНІ ПОТОКИ ЗА ДІЇ СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ДЖЕРЕЛ

В загальному випадку дифузійний потік $\vec{J}(t, \vec{r})$ визначається за першим законом Фіка

$$\vec{J}(t, \vec{r}) = -d\vec{\nabla}c(t, \vec{r}). \quad (8)$$

Формальний вираз для випадкового потоку маси $\vec{J}(t, \vec{r})$ знаходимо диференціюючи формулу (5). Маємо

$$\vec{J}(t, \vec{r})|_{\vec{r}=\vec{r}_*} = \vec{J}_h(t, \vec{r})|_{\vec{r}=\vec{r}_*} -$$

$$-d\vec{\nabla} \left(\sum_{i=1}^N \omega_i \int_0^t \iiint_{(V)} G(t, t', \vec{r}, \vec{r}') \delta(\vec{r}' - \hat{r}_i) d^3\vec{r}' dt' \right) |_{\vec{r}=\vec{r}_*}, \quad (9)$$

де $\vec{J}_h(t, \vec{r})$ – дифузійний потік в смугі за відсутності внутрішніх точкових джерел:

$$\vec{J}_h(t, \vec{r})|_{x=x_*} = \frac{d}{x_0} \left[c_0 - c_* + \frac{2}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_0 + (-1)^{n+1} c_* \right) e^{-\frac{dx_n^2 t}{\rho}} \cos(x_n x_*) \right] \quad (10)$$

Зазначимо, що потік $\vec{J}_h(t, \vec{r})$ через нижню границю смуги $x_* = x_0$ має вигляд

$$\vec{J}_h(t, \vec{r})|_{x=x_0} = \frac{d}{x_0} \left[c_0 - c_* + \frac{2}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n c_0 - c_* \right) e^{-\frac{dx_n^2 t}{\rho}} \right]. \quad (11)$$

Підставляємо функцію Гріна (7) у формулу (9) і усереднюємо за випадковими координатами місцезнаходження джерел \hat{r}_i з рівномірною функцією розподілу. Враховуємо, що $\vec{J}_h(t, \vec{r})$ – детермінована функція, тоді отримаємо

$$\left\langle J|_{\vec{r}=\vec{r}_*} \right\rangle = J_h|_{x=x_*} - \frac{2\Omega}{x_0 N (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-dx_n^2 t / \rho}}{x_n^2} \cos(x_n x_*) [\cos(x_n \bar{x}_1) - \cos(x_n \bar{x}_2)]. \quad (12)$$

Зокрема, усереднений дифузійний потік через нижню границю смуги $x = x_0$ набуде вигляду

$$\left\langle J|_{\vec{r}=\vec{r}_*} \right\rangle = J_h|_{x=x_0} - \frac{2\Omega}{x_0 N (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{-dx_n^2 t / \rho}}{x_n^2} (-1)^n [\cos(x_n \bar{x}_1) - \cos(x_n \bar{x}_2)]. \quad (13)$$

У стаціонарному режимі ($t \rightarrow \infty$) вираз для усередненого потоку зведеться до форми

$$J_*^{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle J|_{\vec{r}=\vec{r}_*} \right\rangle = \frac{d}{x_0} [c_0 - c_*] - \frac{2\Omega}{x_0 N (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2} \cos(x_n x_*) [\cos(x_n \bar{x}_1) - \cos(x_n \bar{x}_2)], \quad (14)$$

або, через нижню границю смуги:

$$J_0^{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle J|_{x=x_0} \right\rangle = \frac{d}{x_0} [c_0 - c_*] - \frac{2\Omega}{x_0 N (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_n^2} [\cos(x_n \bar{x}_1) - \cos(x_n \bar{x}_2)]. \quad (15)$$

Проведемо чисельні експерименти на основі отриманих формул.

IV. ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ УСЕРЕДНЕНИХ ДИФУЗИЙНИХ ПОТОКІВ

Числові розрахунки тут і надалі проводились у безрозмірних змінних

$$\xi = x/x_0, \quad \tau = dt/\rho x_0^2. \quad (17)$$

У якості базових використано такі значення параметрів: $d = 1$, $\rho = 1$, $N = 3$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 5$, $\xi_0 = 1$, $\bar{\xi}_1 = \bar{x}_1/x_0 = 0.3$, $\bar{\xi}_2 = \bar{x}_2/x_0 = 0.7$, $c_0 = 1$, $c_* = 0$. Графіки усереднених дифузійних потоків домішкової речовини у смугі безрозмірної товщини ξ_0 для рівномірного розподілу випадкового розташування системи точкових джерел наведено на рис. 1-3. Розрахунки проводилися за формулами (10)-(15). Точність при сумуванні рядів складала 10^{-12} .

Рис. 1 ілюструє порівняльні розподіли усереднених сумарних потоків частинок домішки $\langle J|_{\xi=\xi_*} \rangle$ через поверх-

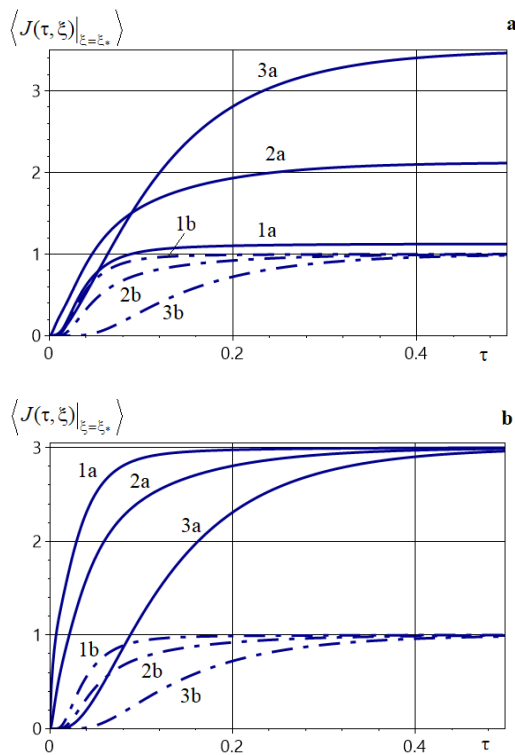


Рис. 1. Порівняльні розподіли усереднених потоків домішки і потоків за відсутності внутрішніх точкових джерел через різні перерізи за дії джерел на інтервалі $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.3, 0.7]$ (Рис. а) і на інтервалі $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.3, 0.5]$ (Рис. б)

ню $\xi = \xi_*$ за дії системи випадкових точкових джерел і дифузійних потоків $J_h|_{\xi=\xi_*}$ за відсутності внутрішніх точкових джерел, які знайдені на основі розв'язків однорідної крайової задачі через різні перерізи $\xi_* = 0.51, 0.59, 1$ (криві 1-3 відповідно). Криві а (суцільні лінії) відповідають графіками $\langle J|_{\xi=\xi_*} \rangle$, а криві б (штрих-пунктирні лінії) – графікам $J_h|_{\xi=\xi_*}$. На рис. а обчислення проведені для $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.3, 0.7]$, на рис. б – для $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.3, 0.5]$.

На рис. 2 продемонстровано графіки функції $\langle J|_{\xi=\xi_*} \rangle$, коли система внутрішніх джерел маси складається з трьох рівнопотужних точкових джерел. Тут різні криві відповідають різним довжинам інтервалу дії точкових джерел. При цьому сам інтервал розташовано по центру смуги $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.05, 0.95]$, $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.25, 0.75]$, $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.4, 0.6]$, $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.45, 0.55]$, $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.49, 0.51]$ (криві 1-5). Рисунок а побудований для потоків через переріз $\xi_* = 0.51$, а рисунок б - через нижню границю смуги $\xi_* = 1.0$.

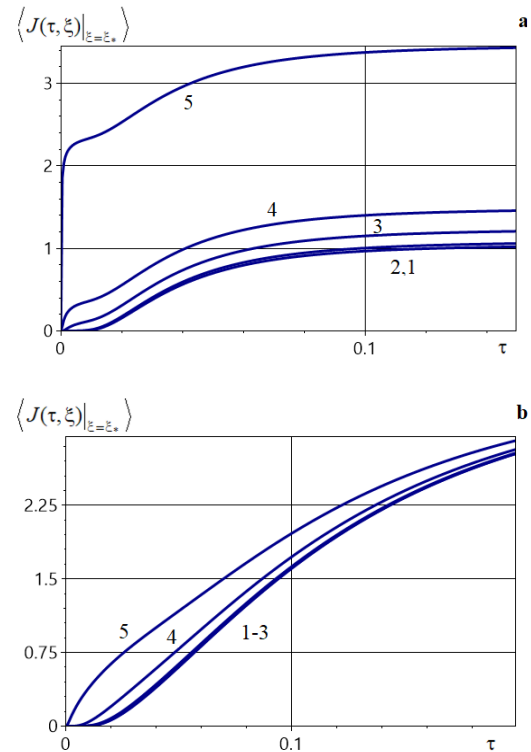


Рис. 2: Усереднені потоки домішки за різних довжин інтервалу дії точкових джерел через перерізи $\xi_* = 0.51$ (Рис. а) і $\xi_* = 1.0$ (Рис. б)

На рис. 3 показані графіки $\langle J|_{\xi=\xi_*} \rangle$ для різних місць розташування інтервалу дії точкових джерел $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2]$ в області тіла. При цьому довжина інтервалу фіксована і

дорівнює 0.1. $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.05, 0.15]$, $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.25, 0.35]$, $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.45, 0.55]$, $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.65, 0.75]$, $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.85, 0.95]$ (криві 1-5).

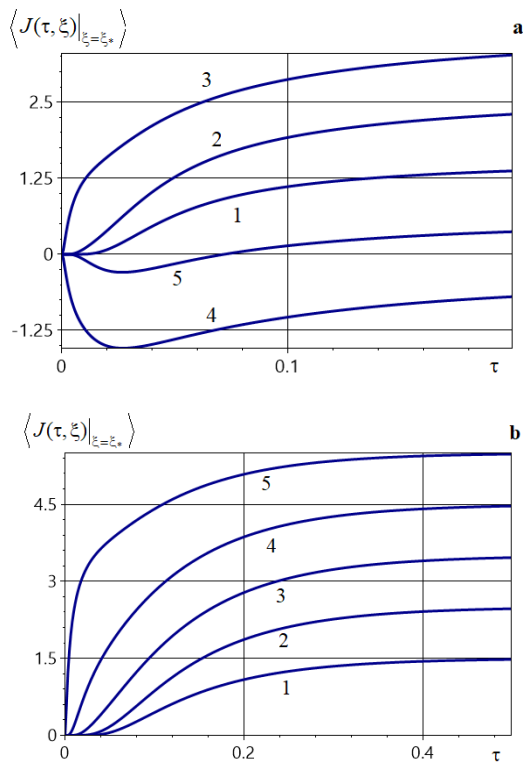


Рис. 3: Усереднені потоки домішки за різного положення системи джерел в тілі через перерізи $\xi_* = 0.51$ (Рис. а) і $\xi_* = 1$ (Рис. б)

Зазначимо, що наявність в тілі системи випадкових точкових джерел суттєво впливає на значення усередненого дифузійного потоку і практично не впливає на його поведінку (Рис. 1). За відсутності в смугі внутрішніх джерел, чим ближче переріз $\xi = \xi_*$ до нижньої границі смуги, тим менші значення потоку на всьому часовому проміжку. За наявності системи джерел поведінка усередненого потоку є іншою, зокрема значення потоку в стаціонарному стані є тим більшими, чим точка перерізу ближче до границі $\xi = \xi_0$. Коли в системі діють внутрішні джерела, для малих часових інтервалів спостерігається більш стрімке зростання потоку $\langle J|_{\xi=\xi_*} \rangle$ ніж $J_h|_{\xi=\xi_*}$ (Рис. 1). Стаціонарний режим для $J_h|_{\xi=\xi_*}$ є тим самим (криві 1б, 2б, 3б на Рис. 1), при цьому його значення є в рази меншими ніж значення усередненого потоку. Наприклад,

$$\left\langle J^{st} \right\rangle_{\substack{\xi_* = 0.59 \\ [\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.3, 0.7]}} \Big/ J_h^{st} \Big|_{\substack{\xi_* = 0.59 \\ [\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.3, 0.7]}} \approx 2.1 \text{ (криві 2, Рис. 1а)}$$

$$\text{і} \left\langle J^{st} \right\rangle_{\substack{\xi_* = 0.59 \\ [\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.3, 0.5]}} \Big/ J_h^{st} \Big|_{\substack{\xi_* = 0.59 \\ [\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.3, 0.5]}} \approx 3 \text{ (криві 2, Рис 1б)}.$$

Аналізуючи вплив ширини інтервалу дії джерел на усереднений потік, констатуємо, що найбільші значення досягаються для малих довжин інтервалу (криві 5, Рис 2а, 2б).

Значення усередненого дифузійного потоку через нижню границю смуги є тим меншими, чим ближче інтервал дії системи точкових джерел розташований до границі тіла $\xi = 0$ (Рис. 3б). При розташуванні $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2]$ біля верхньої границі смуги для перерізів $\xi = \xi_*$ в середині тіла функція $\langle J \rangle$ є монотонно зростаючою (крива 1, Рис. 3а). При зсуві інтервалу від границі $\xi = 0$ значення дифузійного потоку зростають (крива 2, Рис. 3а).

V. КІЛЬКІСТЬ РЕЧОВИНИ, ЩО ПРОЙШЛА ЧЕРЕЗ СМУГУ

Визначимо також кількість речовини, що пройшла через смугу за певний проміжок часу [8]:

$$Q_* = \int_0^{t_*} \langle J(t, \bar{r}) \rangle_{x=x_0} dt.$$

При цьому використаємо розрахункові формули для усереднених дифузійних потоків (12), (13). Проінтегрувавши ці вирази за часом, отримаємо

$$Q_* = \frac{t_* d}{x_0} \left[c_0 - c_* - \frac{2\Omega}{dN(\bar{x}_2 - x_1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_n^2} [\cos(x_n \bar{x}_1) - \cos(x_n \bar{x}_2)] \right] + \frac{2}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_n^2} \left\{ c_0 + (-1)^{n+1} c_* + \frac{\rho \Omega [\cos(x_n \bar{x}_1) - \cos(x_n \bar{x}_2)]}{dN(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) x_n^2} \right\} \times \left(1 - e^{-dx_n^2 t_* / \rho} \right).$$

Зазначимо, що асимптотична частина кількості речовини, що пройшла через смугу, прямо пропорційна часу протікання процесу дифузії домішкових частинок t_* .

Графіки кількості домішкової речовини, що пройшла через смугу безрозмірної товщини ξ_0 для рівномірного розподілу випадкового розташування системи точкових джерел на певному внутрішньому інтервалі, наведено на рис. 4, 5. Рис. 4 демонструє графіки Q_* для різних місцезнаходжень інтервалу дії точкових джерел $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2]$ в області тіла: $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.1, 0.2]$, $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.3, 0.4]$, $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.5, 0.6]$, $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.7, 0.8]$, $[\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2] = [0.9, 1]$ (криві 1-5).

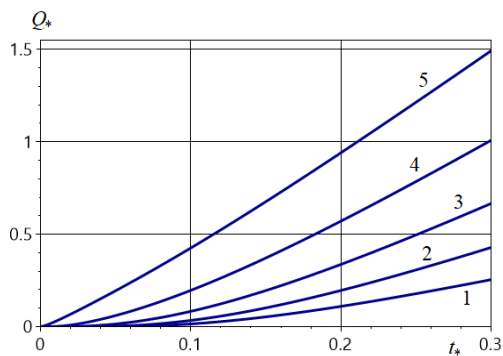


Рис. 4. Кількість речовини, що пройшла через смугу, за різного положення інтервалу $[\xi_1, \xi_2]$ в області тіла

На рис. 5 показано графіки кількості речовини, що пройшла через смугу за час t_* , у випадку, коли система складається з трьох точкових джерел однакової потужності для різних Ω . Крива 1 відповідає системі $\{1.5, 1.5, 1.5\}$, крива 2 - $\{3, 3, 3\}$, крива 3 - $\{6, 6, 6\}$, крива 4 - $\{12, 12, 12\}$, крива 5 - $\{60, 60, 60\}$.

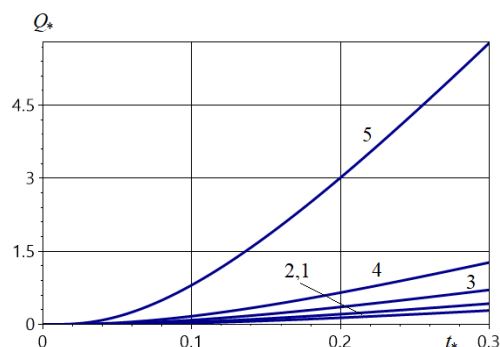


Рис. 5. Кількість речовини, що пройшла через смугу, за дії системи трьох рівнопотужних джерел різної сумарної потужності

Зазначимо, що положення інтервалу дії системи випадкових точкових джерел маси суттєво впливає на кількість речовини Q_* , яка пройшла через нижню поверхню смуги за час t_* . Чим ближче цей проміжок розташований до нижньої поверхні $\xi_* = 1$, тим більше і тим стрімкіше величина Q_* зростає з часом (Рис. 4). За дії системи трьох однакових джерел різної сумарної потужності, величина Q_* тим більша, чим більші значення Ω (рис. 5). При цьому, якщо Ω зростає у 4 рази (криві 1 і 3 на рис. 5), Q_* зростає приблизно в 2.5 рази, а саме, $Q_* \Big|_{\tau=0.3, \Omega=18} / Q_* \Big|_{\tau=0.3, \Omega=4.5} = 2.6207$.

VI. ВИСНОВКИ

Таким чином промодельовано такі характеристики дифузійного процесу як потоки маси та кількість речовини, що пройшла через смугу за певний проміжок часу, за дії системи випадкових точкових джерел маси. У моделі джерела маси різної потужності розташовані рівномірно у певній внутрішній частині смуги. Постановка крайової задачі дифузії зроблена на випадкову функцію

концентрації мігруючої речовини. За першим законом Фіка одержана загальна формула для випадкового дифузійного потоку через довільний переріз тіла. Для отримання розрахункової формули проведено процедуру усереднення функції потоку за місцезнаходженням точкових джерел, що складають систему. Одержано вираз для усереднених потоків домішки через нижню границю смуги. Інтегруванням усередненого потоку за часом отримано розрахункову формулу для кількості речовини, що пройшла через шар за заданий часовий інтервал. На основі отриманих формул розроблено комплекс програм для симуляції усереднених потоків через довільний внутрішній переріз тіла та кількості речовини, що пройшла через нижню поверхню. Встановлено основні закономірності шуканих функцій в залежності від таких характеристик як положення і ширина інтервалу дії системи точкових джерел в області тіла, кількість і потужність окремих джерел в системі і наявність джерела домінуючої потужності. Зокрема показано, що наявність в тілі системи точкових джерел маси збільшує значення усередненого дифузійного потоку мігруючої речовини через довільний переріз шару. Також показано, що чим ближче інтервал дії системи джерел розташований до нижньої поверхні смуги і/або до площини перерізу, через яку вимірюється потік, тим більшими є значення дифузійного потоку і тим стрімкіше зростання функції від початку часового інтервалу. Встановлено, що наявність системи випадкових джерел суттєво збільшує кількість речовини, яка пройшла через нижню границю смуги за певний час. Так само, як і для функції потоку, потужність джерел і положення інтервалу в тілі є значущими факторами впливу на досліджувану величину.

У перспективі важливо провести математичне моделювання та симуляцію процесів дифузії за дії випадково розташованих точкових джерел маси, коли розташування кожного такого джерела в області тіла є незалежною випадковою величиною, за різних імовірнісних розподілів.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [10] J. A. Svendsen, M. Waskaas, "Mathematical modelling of mass transfer of paramagnetic ions through an inert membrane by the transient magnetic concentration gradient force," *Physics of Fluids* 32, 013606, 2020. <https://doi.org/10.1063/1.5130946>
- [11] Y. Gong, P. Li, X. Wang, X. Xu, "Numerical solution of an inverse random source problem for the time fractional diffusion equation via PhaseLift," *Inverse Problems* 37, 045001, 2021. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/abe6f0>
- [12] J. Crank. "The mathematics of diffusion", 2nd ed., Oxford: Clarendon Press, 1975.
- [13] P. Y. Pukach, Y. A. Chernukha, "Mathematical modeling of impurity diffusion process under given statistics of a point mass sources system. I," *Mathematical Modeling and Computing*, Vol. 11, No. 2, pp. 385–393, 2024. <https://science.lpnu.ua/mmc/all-volumes-and-issues/volume-11-number-2-2024/mathematical-modeling-impurity-diffusion-process>
- [14] M. Abramowitz, I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions," National Bureau of Standards Applied Mathematics, 1964.
- [15] I. N. Sneddon, "Fourier transforms," New York: Dover Publications, Inc., 1995.
- [16] G. A. Korn, T. M. Korn, "Mathematical handbook for scientists and engineers," 2nd ed., Mineola: Dover Publications, Inc., 2000.

- [17] Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха, Ю. І. Білушак “Математичне моделювання гетеродифузійних процесів при розпаді частинок,” Львів: Растр-7, 2018.